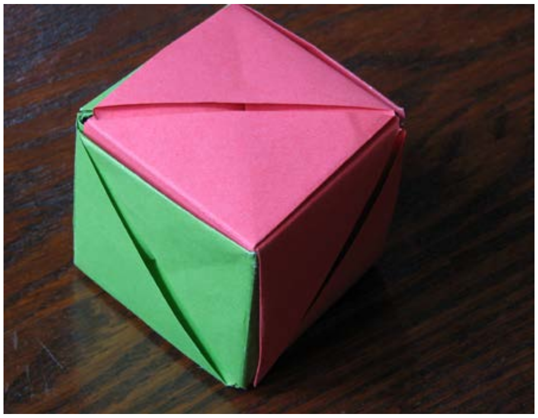
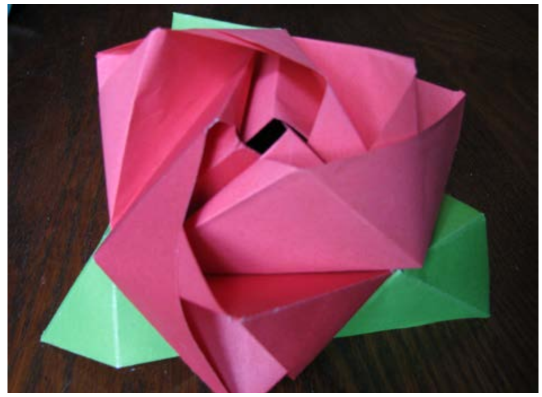
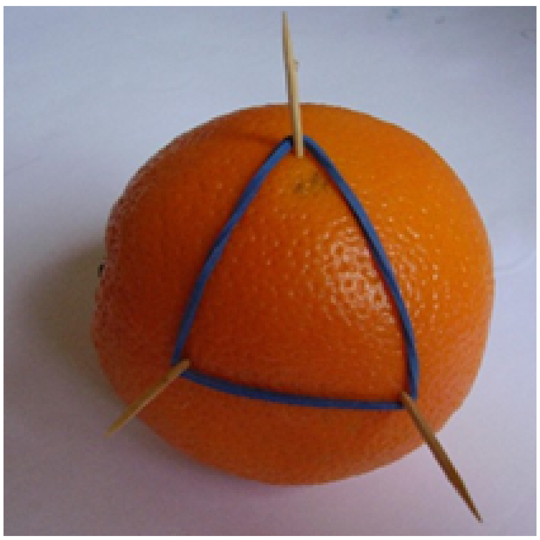
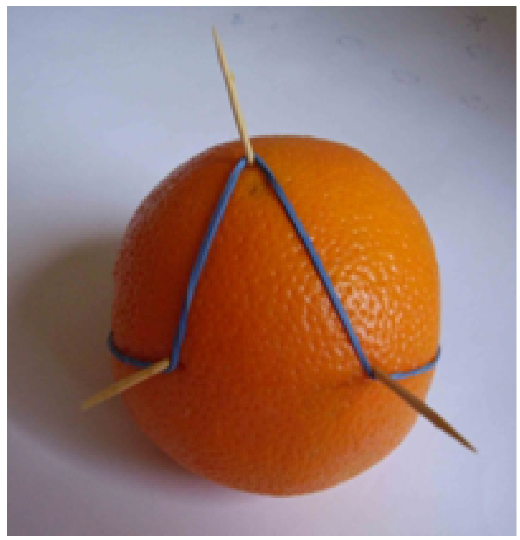

3
2
1


LÉNÁRT SPHERE
LÉNÁRT SPHERE
LÉNÁRT SPHERE
LÉNÁRT SPHERE
3
2
1

A játéktól a kutatásig
Matematikai és természettudományos tanár–diák tehetséggondozó program

Szerkesztette Pálfalvi Józsefné

Kiadta a Varga Tamás Tanítványainak Emlékalapítványa

Budapest, 2014

ISBN 978-963-08-9839-3
Lektor: Oláh Vera
Műszaki szerkesztő: Fried Katalin
Borítógrafika: Juhász Péter

Tartalomjegyzék

Előzmények

Hogyan kezdődött?

A Varga Tamás Tanítványainak Emlékalapítványa pályázati támogatással (NTP-OKA-III) „A játéktól a kutatásig” címmel diákprogram-sorozatot indított 2010-ben. A program célja volt a középiskolás tanulók matematikai, természettudományos és műszaki ismereteinek gazdagítása, elmélyítése.Célunk volt az is, hogy a program a diákok figyelmét a természet-tudományos (kutatói, tanári) pályák felé irányítsa, azt minél vonzóbbá tegye.

A pályázati anyag összeállításában támaszkodtunk az évenkénti hagyományos Varga Tamás Módszertani Napok 2009. évi diákszekciójára, ahol az egyéb programok mellett diákok csoportos versenyét is megrendeztük. Mintegy 60 diák és velük együttműködve 10 tanár vett részt a matematikai játékokban, a speciális előadásokon, közben a csoportmunkákban a tanárok együtt dolgoztak tanítványaikkal. A Varga Tamás Módszertani Napokon a matematikatanítás javításával foglalkozunk. Az itt összegyűlő tanárok, kutatók és más oktatási szakemberek megvitatják a matematikatanítás problémáit, új javaslatokat fogalmaznak meg, megismerkednek új eszközökkel, új matematikai és matematikadidaktikai eredményekkel előadások, beszélgetések és műhelymunkák keretében.

2009 óta minden évben működik a Varga Tamás Módszertani Napokon „A játéktól a kutatásig „diákszekció.

2010-11-ben a pályázati rendezvénysorozat első szakasza 60 órás képzés volt, ezt követte egy 30 órás program. A programsorozat foglalkozásai – egyenként 10 órásak – általában szombatonként kerültek megrendezésre. Ugyancsak folytattuk az aktuális Varga Tamás Módszertani Napok keretében „A játéktól a kutatásig” diákszekciókat.

A programsorozatra a középiskolás diákokat tanáraikkal együtt hívtuk. A foglalkozásokon egy-egy iskolai csoportban diákok és tanárok együt tevékenykedtek, együtt vettek részt a játékokban, csapatversenyekben és a feladatok megoldásában. A programban a matematikai tartalmak mellett érdekes fizikai, kémiai, biológiai témák is szerepeltek. A rendezvények helyszine legtöbbször az ELTE TTK lágymányosi kampusza volt, de a változatos munkaformák között több tárlatlátogatásra is volt lehetőség: a Magyar Műszaki és Közlekedési Múzeumban és az ELTE TTK Ásványtárában valamint a Biológiai és a Paleontológiai múzeumában.

A sokszínű program, a kiváló előadók, az érdekes és aktuális témák, a látványos kísérletek, játékok, vetélkedők, a kellemes, barátságos légkör, mindezek együtt eredményezték a sikert. A résztvevő tanárok és diákok egyaránt jól érezték magukat, véleményük szerint hasznos és eredményes volt a program. A közös csoportmunkák a tanulók szociális kompetenciáit is fejlesztették a természettudományos, matematikai, logikai és szövegértési kompetenciák mellett.

2012-ben már további pályázati támogatás nélkül, az előadók, szervezők és résztvevők lelkesedésére, segítőkészségére építve folytattuk a sikeres sorozatot. Nagy örömünkre bekapcsolódott a szervezésbe a Gödöllői Református Líceum *Kampfl Orsolya* tanárnő vezetésével, így lett az egyik alkalommal a házigazda és a program szervezője a Gödöllői Református Líceum matematikai, fizikai és informatikai tanárok munkaközössége.

A játéktól a kutatásig diákprogram koncepciója

A középiskolások egy részének tehetsége a tanulmányi versenyeken elért eredményekben mutatkozik meg, de még ez a siker sem mindig elegendő motiváció a műszaki vagy természettudományos pálya választásához. A játéktól a kutatásig sorozatot igyekeztünk minél szélesebb körben meghirdetni. A tájékoztatásban igénybe vettük a Bolyai János Matematikai Társulat segítségét is. Mivel a rendezvénynek szállásnyújtáshoz nem volt lehetősége, ezért legtöbben valamelyik budapesti vagy Budapest környéki iskolából jöttek a részvevők. Ezzel a programmal nem a tanulmányi versenyek élmezőnyét céloztuk meg, hanem inkább az érdeklődő, nyitott gondolkodású, de esetleg nehezebb körülmények között tanuló diákokat akartuk elérni. Ebben nagy segítségünkre voltak a lelkiismeretes, hivatásukat szerető, munkájukat magas színvonalon végző kollégáink, akik kellő lelkesedéssel és meggyőző erővel tudták tanítványaikat a rendezvényekre beszervezni.
A mai magyar oktatás rendszerében még mindig nem sikerült megfelelően összekapcsolni az igényes, megalapozott matematikai ismereteket a rájuk épülő fizika, kémia vagy informatika tantárgyak megértéséhez, mélyebb összefüggéseinek elsajátításához szükséges tudással. Jellemző, hogy nem sikeres a kémiaórán az a tanuló, akinek gondja van a számolással és általában a fizika alapjaihoz is magasabb szintű matematikai tudás volna szükséges, mint amilyen szintre addig a matematikaórán eljutnak a diákok. A természettudományok különböző területeinek összefüggései csak nagyon korlátozottan jelennek meg az iskolai tananyagban, a gyerekek pedig csak tantárgyakban és nem komplex ismeretekben tudnak gondolkodni. A megtanultak innovatív alkalmazása nem követelmény, a továbbgondolkodás vagy az új tudományterületek (magfizika, hálózatok, nanotechnika, stb. . .) iránti érdeklődés igen ritka.
Programunkban igyekeztünk összekötni a matematikát és a természettudományokat, megmutatni a matematika alkalmazhatóságát, másrészt a természettudományoknak a matematikáragyakorolt gazdagító hatását.A matematikából kiinduló illetve a gyakorlatban és a természettudományokban alkalmazható területeket kívántunk felvillantani– a teljesség igénye nélkül – ezek a további kutatásokra inspirálhatják a diákokat tanáraik segítségével. A foglalkozások eredményeképpen a résztvevő tanulók konkrét példákat ismertek meg a matematika hatékony alkalmazhatóságára.Találkoztak a természettudományok és a matematika közös határterületeinek néhány új kutatási kérdésével és eredményével.Gyakorlatot szereztek az iskolai feladatokhoz képest újtípusú, szokatlanabb, érdekes problémák megoldásában. Fontosnak tartjuk, hogy a tanárok számára ez szakmai továbbképzésnek is megfelelt, hiszen a tartalmak komplexitása, a változatos munkaformák, módszerek, a diákokkal való közös tevékenységek a tanárok szakmai, pedagógiai, módszertani ismereteit is gazdagították.

A résztvevők

A részvétel ingyenes volt, lehetőség volt arra, hogy valaki csak egy-egy programon vagy akár valamennyi alkalommal részt vegyen. Néhány iskolából kialakult egy törzsközönség 20-25 fő diákból és 3-4 tanárból, ilyen volt például a Gödöllői Református Líceum, a Vörösmarty Gimnázium, vagy a Törökbálinti Gimnázium és az Erzsébetvárosi szakképző iskola. Több diákunk visszajárt érettségi után is és voltak rendszeresen segítő egyetemistáink is.

Az előadók

Az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ, valamint az ELTE TTK további tanszékeinek oktatói rendszeresen közreműködtek az egyes rendezvényeken. Az előadók, a foglalkozások vezetői a matematika és a fizika, kémia, biológia országosan elismertszaktekintélyei, a természettudo-

mányok neves szakemberei közül kerültek ki, valamennyien olyanok, akiknek nagy tapasztalata van a középiskolás korosztály életkori sajátosságairól.
Kiemeljük, hogy a 2010-es Varga Tamás Módszertani Konferencia nyitó előadását *Lovász László* tartotta többszáz fős közönségnek, ahol az iskolai tanárok és egyetemi oktatók és hallgatók mellett jelen voltak a Játéktól a kutatásig diákszekció középiskolás résztvevői is.

A szervezők és állandó közreműködők

Dr. Munkácsy Katalin főiskolai docens, ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ, fő kutatási területei a matematikatörténet valamint a tehetséggondozás. A 2009. évi Varga Tamás Módszertani Napok konferencián a diákszekció vezetője volt.
Dr. Radnóti Katalin főiskolai tanár, ELTE TTK Fizika Intézet, fő kutatási területe a fizika tanításának számos kérdése (tehetséggondozás, a modern fizikatanítás, fizikatörténet, stb).
Dr. Róka András föiskolai docens, ELTE TTK Kémiai Intézet, 2009-ben elnyerte az Év mentora díját a természettudományokat népszerűsítő kiemelkedő munkájáért.
Pálfalvi Józsefné dr., a program szakmai irányítója és fő szervezője, az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központjának nyugalmazott főiskolai docense.
Oláh Vera matematikus, a Varga Tamás Tanítványainak Emlékalapítványa pályázati tevékenységének irányítója, a programsorozat szervezője.

Az előadók névsora 2009–2012-ig

Ambrus Gabriella, Bakos Viktor, Baranyi Zoltán, Bérczi Szaniszló, Borbáth Gábor, Csabai István, Cserti József, Fried Katalin, Gyimesi Róbert, Henits Péter, Holló-Szabó Ferenc, Homonnay Zoltán, Horváth Ákos, Hraskó András Jánosi Imre, Jenei Péter, Kampfl Orsolya, Karkus Zsolt, Képes Gábor, Kézér Ildikó, Kisics István, Kovács Ilona, Korándi József, Kriska György, Lovász László, Lovrics László, Matskási Istvánné, Maus Pál, Munkácsy Katalin, Orosz Gyula, Pálfalvi Józsefné, Pávó Gyula, Pertis Szabolcs, Pintér Marianna, Radnóti Katalin, Róka András, Simonovits András, Szeredi Éva, Szunyogh Gábor, Sztojcsevné Fekete Mária, Török Judit, Unyi Tamás, Zolnai Dániel, Weiszburg Tamás, Wintsche Gergely.

„A játéktól a kutatásig” matematikai, természettudományos és műszaki tehetséggondozó sorozat időpontjai és programja 2010–2012

2010.

2010. május 8.

Helyszíne: Magyar Műszaki és Közlekedési Múzeum Tanulmánytára. 1117 Budapest, Prielle Kornélia utca 10.
Pálfalvi Józsefné: Megnyitó. A matematika, mint a világ megismerésének eszköze
Képes Gábor: 51 éves a magyar számítógép. Múzeumi séta, vezetéssel
Radnóti Katalin és *Henits Péter:* Galilei szerepe mai modern világképünk kialakulásában
Munkácsy Katalin: Mérjük meg a Föld sugarát! Időbecslés futással (szabadtéri program)
Wintsche Gergely: „Legyen Ön is milliomos” (1.) Matematikai játékok, csapatverseny

2010. június 12.

Helyszíne: Magyar Műszaki és Közlekedési Múzeum Tanulmánytára 1117 Budapest, Prielle Kornélia utca 10.
Munkácsy Katalin: Vizes kísérletek térfogat mérésére (szabadtéri program)
Csabai István: Az Univerzum térképe
Róka András: „Ég a gyertya, ég” (kémiai előadás kísérletekkel)
Szunyogh Gábor: Mobileumi tárlatvezetés
Fried Katalin és *Török Judit:* Játékos matematika

2010. szeptember 25.

Helyszíne: ELTE TTK 1117 Pázmány Péter sétány 1/C-A
Maus Pál: Érdekes gyakorlati problémák
Wintsche Gergely: „Legyen Ön is milliomos” (2.) Matematikai játékok, csapatverseny
Munkácsy Katalin: Rejtvények, titkok, kódok (szabadtéri foglalkozások)
Róka András: Déjàvu.(kémiai előadás kísérletekkel)
Radnóti Katalin: A Nobel-díjas család.

2010. november 5–6.

Helyszíne: ELTE TTK 1117 Pázmány Péter sétány 1/C-A
A Varga Tamás Módszertani Napokkal és a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok ankétjával közösen szervezett.
Gyimesi Róbert: Számítógépes feladatok és gyakorlatok középiskolás diákoknak I. (GEOGEBRA)
Ambrus Gabriella: Modellezési feladatok
Radnóti Katalin: Érdekes fizikai és kémiai problémák az elsőéves TTK-sok felmérő dolgozata alapján
Lovász László: Véletlen és álvéletlen (A Varga Tamás Módszertani Napok konferencia nyitó előadása)
Maus Pál: Feladatmegoldó szeminárium
Gyimesi Róbert: Számítógépes feladatok és gyakorlatok középiskolás diákoknak II. (GEOGEBRA)
Simonovits András: Archimédesz munkássága
Fried Katalin és *Korándi József:* Feladatmegoldó csoportverseny

2010. december 11.

Helyszíne: ELTE TTK 1117 Pázmány Péter sétány 1/C-A
Munkácsy Katalin: A közvélemény-kutatás matematikája. Fűszálak a réten.
Lovrics László: József játék – ki lesz a túlélő?
Pálfalvi Józsefné: Csodálkozol? Elhiszed? Találd meg a trükköt!
Weiszburg Tamás: Barangolás a kristályok birodalmában. Látogatás az Ásványtárban
Jánosi Imre: Mi az igazság? Avagy, globális klímaváltozás a közelmúlt botrányainak tükrében

2011.
2011. március 5.

Helyszíne: ELTE TTK 1117 Pázmány Péter sétány 1/C
Bakos Viktor: Érdekességek és meglepetések a Pascal háromszögben
Lovrics László: Meddig titok a titok?

Radnóti Katalin: A nukleáris technika múltja, jelene, jövője
Munkácsy Katalin: Becslés, mérés, az adatok elemzése. (szabadtéri program)
Pávó Gyula: Látogatás a fizika laborban. Röntgenfluoreszcencia
Róka András: Atomi és molekuláris építészet (kémiai előadás kísérletekkel)

2011. április 9.

Helyszíne: ELTE TTK 1117 Pázmány Péter sétány 1/C
Bércesi Szabolcs: Érdekes matematika feladatok
Kriska György: Térhatású szemléltetés és megjelenítés a biológiában
Dr. Matskási Istvánné: Tárlatvezetés a Biológiai kiállításon
Homonnay Zoltán: Hogyan lehetett a radioaktív sugárzás segítségével bizonyítani, hogy a Marson valaha víz volt?
Jenei Péter: Játék a tűzzel. Látványos hőtani kísérletek

2011. május 7.

Helyszíne: ELTE TTK 1117 Pázmány Péter sétány 1/C
Kisics István: Zsonglőrködés labdákkal, számokkal
Karkus Zsolt: Valóban élt Ádám és Éva?
Lovrics László: Meddig titok a titok? 2. rész
Munkácsy Katalin: Kísérletek és játékok (szabadtéri program)
Pálfalvi Józsefné: Biológia, kémia, fizika, matematikafeladatok. Csoportverseny
Radnóti Katalin: Csernobil – Fukushima
Róka András: Igény és fedezet(kémiai előadás kísérletekkel)

2011. november 11. és 12.

Helyszíne: ELTE TTK 1117 Budapest Pázmány Péter sétány 1/C és 1/A
A Varga Tamás Módszertani Napokkal közösen szervezett.
Sztojcsevné Fekete Mária és *Kézér Ildikó:* Számítógépes feladatok és gyakorlatok középiskolás diákoknak I
Radnóti Katalin és *Jenei Péter:* A természettudományok kialakulása. Előadás és kísérletek
Frank András: Elemi matematika gyakorlati alkalmazásokban (A Varga Tamás Módszertani Napok nyitó előadása)
Bérczi Szaniszló: Ősi geometriai tudás az eurázsiai díszítőművészetekben Előadás, csoportmunka
Sztojcsevné Fekete Mária és *Kézér Ildikó:* Számítógépes feladatok és gyakorlatok középiskolás diákoknak II. (GEOGEBRA)
Ambrus Gabriella: Modellezési feladatok. Csoportmunka középiskolásoknak
Orosz Gyula: Csapatverseny matematikából (hatványok, gyökök)
Fried Katalin és *Török Judit:* matematikai feladatmegoldás játékos keretben
Barcs Ádám: E-tananyag használata
Róka András: A kémiai Murphy törvényei. (kémiai előadás kísérletekkel)

2012.
2012. március 10.

Helyszíne: ELTE TTK 1117 Pázmány Péter sétány 1/A
Lovrics László: Titokmegosztás – Ki találja meg a kalózkincset? (előadás és csoportmunka)
Munkácsy Katalin: Mire megyünk függvénytáblázat nélkül? (1) (szabadtéri program)

Jenei Péter és *Radnóti Katalin:* Energia mindenhol – Kísérletek és előadás
Róka András: A szeretet és gyűlölet elvétől a kémiai érvényesülésig (kémiai előadás kísérletekkel)

2012. március 30.

Helyszíne: Gödöllői Református Líceum 2100 Gödöllő, Szabadság tér 9.
Borbáth Gábor: Mozgások vizsgálata a fizikában webkamerával (*WebCamLaboratory*)
Unyi Tamás: Közepek szinte mindenütt – nem csak középszinten
Unyi Tamás: Matematikai vetélkedő
Pertis Szabolcs: Megszerkeszteni a szerkeszthetetlent (a Barkács fizika szakkör közreműködésével)
Zolnai Dániel, Kampfl Orsolya: Az egyváltozós függvényektől a Mandelbrot-halmazon át a Fibonacci sorozatig, avagy: programozni jó!

2012. március 31.

Helyszíne: ELTE TTK 1117 Pázmány Péter sétány 1/A
Radnóti Katalin: Energia mindenhol 2.
Lovrics László: Játékok és elméletek (előadás és csoportmunka)
Unyi Tamás: Lánc, lánc, lánctörtek…
Munkácsy Katalin: Mire megyünk zsebszámológép és függvénytáblázat nélkül? (2) („Már a régi görögök is…”?!)
Fried Katalin: A 15-ös játék és hasonlók
Róka András: A megismételhetőség élménye (kémiai előadás kísérletekkel)

2012. április 14.

Helyszíne: ELTE TTK 1117 Pázmány Péter sétány 1/A
Cserti József: Fermat-elv az optikában
Baranyi Zoltán és *Szeredi Éva:* Pentominok. Játék és matematika
Munkácsy Katalin: Mérjük meg a Föld sugarát!
Lovrics László: Játékok és elméletek. Quarto és LX25
Róka András: Távolsági elektronátrendeződés (kémiai előadás kísérletekkel)

2012. április 28.

Helyszíne: ELTE TTK 1117 Pázmány Péter sétány 1/A
Horváth Ákos: A neutrínók, amik átmennek mindenen
Pálfalvi Józsefné: Matematika feladatmegoldó verseny, értékeléssel
Róka András: Az elektronok színháza (kémiai előadás kísérletekkel)

2012. november 16-17.

A Varga Tamás Módszertani Napokkal közösen szervezett.

Helyszíne: ELTE TTK 1117 Pázmány Péter sétány 1/A
Holló-Szabó Ferenc: Matematikai csodák
Hraskó András: Pascal, háromszög? – feladatmegoldás és diszkusszió
Török Judit és *tanárjelöltek:* Matematikai feladatmegoldó verseny, játékos vetélkedők
Wintsche Gergely: Színes feladatok
Jenei Péter: Az anyagok szerkezete és vizsgálata

A játéktól a kutatásig

I. rész
2013

2013-ban is megrendeztük a hagyományos Varga Tamás Módszertani Napokat és ebben az évben is volt diákszekció A játéktól a kutatásig programjával.
A 2013-as Varga Tamás Módszertani Napok kiemelt témája volt az új kerettanterv, amely sok tekintetben továbbra is hordozza a korábbi kerettanterv főbb vonásait, de természetesen számos új szempontot is tartalmaz, illetve bizonyos témákat másként hangsúlyoz. Ezért a konferencia egyik kiemelt fontosságú előadása volt„A matematikai játékok szerepe a kerettantervben” című előadás, amelyet Katz Sándor tartott. Az előadás anyaga elérhető a Matematikatanítási és Módszertani Központ honlapjáról az alábbi linken.
`http://dl.dropboxusercontent.com/u/100162898/pic/vtcikk/katz2013ea.pdf`
Így a konferencia fő témájához is jól köthető volt „A játéktól a kutatásig” diákszekció. A diákszekción a korábbi évek törzsiskoláiból sokan vettek részt, de jöttek újak is. Emellett egy-egy foglalkozáson megjelentek olyan tanárok is, akik egyébként a konferencia többi szekcióit látogatták.
A diákszekció programja
2013. november 9. szombat 9–18
Helyszíne: ELTE TTK épületei 1117 Budapest Pázmány Péter sétány 1/C és 1/A
Hraskó András: Súlyos kérdésekről könnyedén? Geometriai feladatok megoldását néha leegyszerűsíti egy fizikai elv!
Matematikai feladatmegoldó verseny, játékos vetélkedők. Játékvezetők: Török Judit és a tanárjelöltek
Horányi Gábor: Minden nézőpont kérdése! Nehezen megoldható feladatok megoldása könnyedén az egyenletes mozgások témakörében.
Róka András: VIS VITALIS

Hraskó András

Súlyos kérdések

A 2012. évi Varga Tamás Napokon tartott foglalkozáson a „mozaikmódszert” mutattam be. A mozaikmódszer legtisztább formájában a következő kétlépcsős rendszerbben valósul meg: első lépésben a diákcsoportok alakulnak és az egyes csoportok más és más dolgot tanulnak meg vagy sajátítanak el; ezután az előző csoportokhoz képest új vegyes csoportok alakulnak, amelyekben a diákok egymás tanítják meg, egymásnak adják át korábban szerzett ismereteiket.

A felfedeztető oktatással kapcsolatban a módszer egy módosított formájával éltünk. Az első menetben az egyes csoportok más és más feladatsort kaptak, ezen dolgoztak maguk, tanári segítséggel. A különböző csoportok példái ugyanannak a témának más és más oldalát világították meg. Ezután nem alakítottunk ki új, vegyes csoportokat, hanem közös példamegbeszélést tartottunk. Ennek során a diákok úgy tudtak figyelni a többiek megoldására, hogy képesek voltak azt kiegészíteni, más oldalról megvilágítani. A közös diszkusszió jelentősen elmélyítette a téma megértését és jó lehetőséget adott a tartalmas matematikai kommunikációra.

Idén is ezzel a tanítási módszerrel kísérletezem egy vegyes és ismeretlen összetételű diáksereggel. Az alábbi oldalakon a négy csoport feladatsora olvasható.

A témával kapcsolatban további feladatok, olvasnivalók találhatók a

`http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Hrasko_Andras/termtud2011/tomeg/tomegkp.pdf`

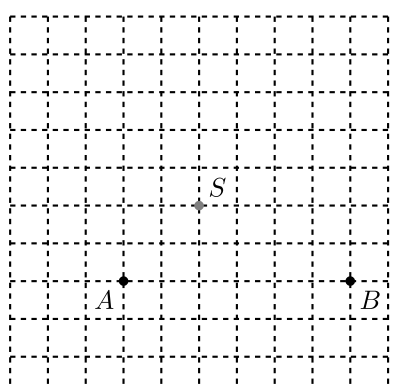
weboldalon, illetve a frissülő

`http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_g_iii.pdf`

gyűjteményben.

Az „A” csoport feladatsora

A.1. Egy nagyon könnyű rúd egyik végéhez 1 kg-os a másik végéhez 2 kg-os súlyt rögzítünk. Hol támasszuk alá a rudat, hogy ne billenjen le?



1. ábra

A.2. Az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontja C, a B-hez közelebbi harmadolópontja D. A szakaszt tekintsük nagyon könnyű rúdnak, amelynek A, B, C pontjaiba tömegeket helyezhetünk el, míg a D pontban támasztjuk alá a rudat. Mely tömegelrendezéseknél lesz egyensúlyban a rúd?

A.3. Az elhanyagolható tömegű síklap A, B pontjaiba 1-1 kg-nyi tömeget helyeztünk el. A lapot az S pontban támasztjuk alá (1. ábra). Hová mekkora tömeget helyezzünk még el, hogy ne billenjen le a lap?

A „B” csoport feladatsora

B.1. Adott két pont. Melyek azok az egyenesek a síkban, amelyektől az egyik pont ugyanolyan messze van, mint a másik?

B.2. Adott két pont, A és B. Melyek azok az egyenesek a síkban, amelyek A-tól kétszer olyan messze vannak, mint B-től?

B.3. Legyen az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja D, a BD szakasz felezőpontja F. Válasszunk az F ponton át egy olyan f egyenest, amely az ABC háromszög oldalai körül AB-t és BC-t metszi. Mutassuk meg, hogy ha az A, B, C pontoknak az f egyenestől való távolsága rendre m_a, m_b és m_c, akkor $m_a + m_c = m_b$.

A „C” csoport feladatsora

C.1. Az O origóból az A, B pontokba mutató helyvektorok $\underline{a}$ és $\underline{b}$. Fejezzük ki az AB szakasz
a) F felezőpontjának;
b) B-hez közelebbi harmadolópontjának
helyvektorát $\underline{a}$-val és $\underline{b}$-vel!
Melyik pont helyvektora a
c) $\frac{2}{3}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b}$;
d) $\frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}$
e) $-\underline{a} + 2\underline{b}$
vektor?
f) Ha változtatjuk az O origót, akkor az a), b), c), d), e) feladatrészekben kapott pontok közül melyik változik meg?

C.2. Legyen az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja D, továbbá messe a C-n és BD szakasz F felezőpontján átmenő egyenes az AB oldalt az E pontban!
a) A tetszőlegesen választott O origóból az A, B, C pontokba mutató helyvektorok $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$. Fejezzük ki a D, F pontok helyvektorát az $\underline{a}$, $\underline{b}$ $\underline{c}$ vektorokkal!
b) Milyen arányban osztja ketté E az AB oldalt?

A „D” csoport feladatsora

D.1. Legyen az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja D, továbbá messe a C-n és BD szakasz F felezőpontján átmenő egyenes az AB oldalt az E pontban! Milyen arányban osztja ketté E az AB oldalt?
Szerkesszük meg az ábrát, fogalmazzunk meg sejtést!

D.2. Jelölje az ABC háromszög AB, BC, CA oldalának felezőpontját rendre F_{AB}, F_{BC}, F_{CA}. Szerkesszük meg az ábrát! Rajzoljuk meg az AF_{BC}, BF_{CA}, CF_{AB} szakazokat is! Figyeljük meg az ábrát, fogalmazzunk meg sejtést!

További feladatok

T.0 Háromszög súlypontja.

T.1 Tetraéder súlypontja. Hogy értelmezzük?

T.2 Az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának felezőpontja F, a CD oldal D-hez közelebbi harmadolópontja E, az EF egyenes az AC átlót a P, a BD átló meghosszabbítását a Q pontban metszi. Határozzuk meg az

$$EP/PF, \qquad AP/PC, \qquad EQ/QF, \qquad DQ/QB$$

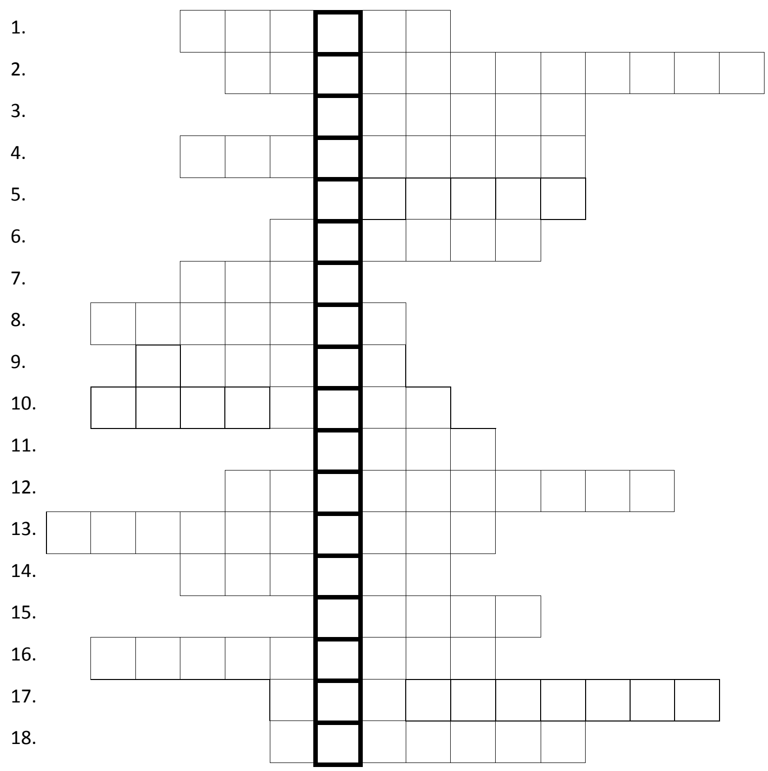
arányok értékét!

T.3 Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alapja az $ABCD$ négyzet. Egy sík az A_1, B_1, C_1, D_1 pontokban metszi el a gúla EA, EB, EC, ED oldaléleit. Határozzuk meg az ED_1/D_1D arányt, ha

$$\frac{EA_1}{A_1A} = 1, \qquad \frac{EB_1}{B_1B} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{EC_1}{C_1C} = \frac{2}{1}.$$

Játékos vetélkedő

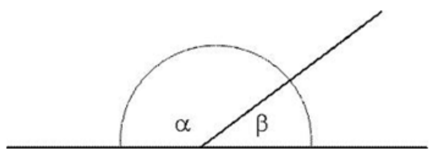
A 2013-ban megrendezett Varga Tamás Napokon tanárszakos hallgatókként a Játéktól a kutatásig című rész szervezését és lebonyolítását kaptuk feladatul. Mivel nem tudtuk pontosan sem a gyerekek létszámát, sem az életkorát, így változatos feladatokkal készültünk egy kétórás vetélkedővel. Amikor a gyerekek megérkeztek, 5-6 fős heterogén csapatokba osztottuk őket, így minden csapatban volt 7-től 12. osztályos tanulóig szinte minden évfolyamról egy-egy fő, 7 csapat versenyzett egymással. A csapatoknak először csapatnevet kellett választaniuk, majd Fodor Edina és Cseri Tímea alábbi rejtvényével indult a játék.



Megoldás: ....

1. Miben különbözik x és –x?
2. Mennyi a háromszög belső szögeinek az összege?
3. Melyik az a négyszög, amelynek van egy párhuzamos oldalpárja?
4. A téglalap minden szöge.........
5. $2^3 = 8$. Minek nevezzük a hatványban a 3-at?
6. Kör középpontjára illeszkedő húr.
7. A sokszögekben a nem szomszédos csúcsokat összekötő egyenes.

8. $5(a+b)^2$? $5a^2+5b^2+10ab$ Mit írjunk a kérdőjel helyére?
9. Elemek sokasága.
10. A függvény koordinátarendszerben ábrázolt képe.
11. A= {1, 2, 3} B= {2, 4, 6} C= {1, 2, 3, 4, 6} A C halmaz hogyan írható fel A és B segítségével?
12. Egy matematikus, aki a derékszögű háromszögekhez kapcsolódó legfontosabb tételt megalkotta.
13. A parallelogrammában minden oldal a szemközti oldallal . . . .
14. Irányított szakasz.
15. A 2, 4, 15 számhármasnak mije a 7?
16. Melyik az az egyetlen sokszög, amelynek nincs átlója?
17. α és β milyen szögek az alábbi ábrán?



18. Az $y = 2x - 3$ függvény képe egy . . . .

És a megoldás:

1.				E	L	Ő	J	E	L							
2.					S	Z	Á	Z	N	Y	O	L	C	V	A	N
3.							T	R	A	P	É	Z				
4.				D	E	R	É	K	S	Z	Ö	G				
5.							K	I	T	E	V	Ő				
6.						Á	T	M	É	R	Ő					
7.				Á	T	L	Ó									
8.		E	G	Y	E	N	L	Ő								
9.			H	A	L	M	A	Z								
10.		G	R	A	F	I	K	O	N							
11.							U	N	I	Ó						
12.					P	I	T	A	G	O	R	A	S	Z		
13.	P	Á	R	H	U	Z	A	M	O	S						
14.				V	E	K	T	O	R							
15.							Á	T	L	A	G					
16.		H	Á	R	O	M	S	Z	Ö	G						
17.						K	I	E	G	É	S	Z	Í	T	Ő	
18.						E	G	Y	E	N	E	S				

Fodor Edina és Cseri Tímea (ELTE Matemeatika Bsc. tanári szakirány, 3. évf.)

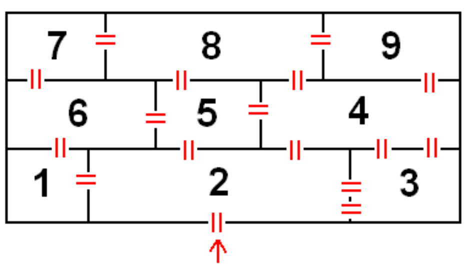
A következő részben az alábbi logikai feladatokat kellett a csapatoknak megoldaniuk mégpedig úgy, hogy 20 percet kaptak, ami alatt ők dönthették el, hogy az 1, 2, 3, 4, illetve 5 pontos feladatok közül ki, melyiket, hogyan oldja meg. A feladatokat Barbarics Márta válogatta össze és kategorizálta a `www.logikaifeladatok.hu` oldal gyűjteményéből.

1 pontos feladatok:

1.1. SEKK + SAKK = MATT. Írj a betűk helyett számokat úgy, hogy igaz legyen az egyenlőség. (Azonos betűk azonos számokat, különböző betűk különböző számokat jelölnek.) Több megoldás is van, azt keressük, ahol a három négyjegyű szám a lehető legkisebb. Mennyi lesz ekkor a számjegyek összege az eredményben?
1.2. Valaki hétfőn, kedden és szerdán hazudik, a többi napokon igazat mond. Ma reggel a következőt mondta: „Tegnap hazudtam. Három nap múlva ismét hazudni fogok.” Milyen nap van ma?
1.3. Egy egyetemista ötéves tanulmányai alatt összesen 33 vizsgát tett le. Minden évben több vizsgát tett le, mint az azt megelőző évben. Ötödéves korában pedig épp háromszor annyit, mint elsőéves korában. Hány tárgyból vizsgázott a negyedik évben?

2 pontos feladatok:

2.1. Az ábrán egy királyi palota alaprajza látható. Egy király minden reggel elmegy sétálni a palota körüli erdőbe. Ezután bemegy a palotába, és minden ajtón keresztül megy pontosan egyszer. Legvégül leül a trónteremben. Melyik helyiség a trónterem?



2.2. Három indián ül a tűz körül: Fehér Tigris, Szürke Egér, Sárga Irigység. Egyszer csak megszólal Fehér Tigris: – Mindhárman fehér, szürke vagy sárga ruhát viselünk, de egyikünk sem olyan színűt, mint a neve. – Valóban! – mondta a sárga ruhás. Milyen színű ruhát viselt Szürke Egér?
2.3. Két falu épült egymás mellé: Káposztafalva és Répafalva. Mindegyikben nyulak laknak, akik gyakran a másik faluból választanak maguknak házastársat. Viszont az a furcsa tulajdonságuk van, hogy csak a szülőfalujukban érzik jól magukat, ha a másik faluban vannak, akkor teljesen összezavarodnak, és nem mondanak igazat. Találkoztunk az utcán Nyuszi Pistával és megkérdeztük tőle, hogy melyik faluban született. Ő azt válaszolta, hogy Káposztafalván született. Ezután a feleségről kérdeztük, hogy Ő vajon hol született. Erre meg ezt felelte: „A feleségem és én is Répafalván születtünk.” Hol született Nyuszi Pista, és hol született a felesége?
2.4. Egy természetes számokból álló számsorozat 4. tagja 5. Ennek a sorozatnak bármely tagjából úgy kapjuk a következőt, hogy ha páros volt, akkor megfelezzük, ha páratlan volt, akkor a 3-szorosából kivonunk egyet. Állapítsuk meg azt a legkisebb számot, amely a sorozat első tagja lehetett!
2.5. Jártam egyszer egy szigeten, ahol a Hazugok és az Igazmondók élnek. A Hazugok mindig hazudnak, az Igazmondók pedig mindig igazat mondanak. Összefutottam egy 12 fős társasággal, és sorban mindegyiküktől megkérdeztem, hogy „Hány Igazmondó van köztetek?”. Az első 10 válasz a következő volt: 7, 0, 1, 6, 6, 4, 5, 1, 5, 6. Mi lehetett az utolsó két válasz?

3 pontos feladatok:

3.1. A jósdában három isten ül: az Igazság, a Hazugság és a Bölcsesség. Az Igazság mindig igazat mond, a Hazugság mindig hazudik, a Bölcsesség olykor igazat mond, olykor hazudik. Egy nap ellátogatott hozzájuk egy filozófus. Az istenek egymás mellett ültek, és a filozófus szerette volna megtudni, milyen sorrendben. Ezért a következő kérdéseket tette fel nekik:
A bal oldalit kérdezte: „Ki ül melletted?” – A válasz ez volt: „Az Igazság.”
A középsőt kérdezte: „Te ki vagy?” – A válasz ez volt: „A Bölcsesség.”
A jobb oldalit kérdezte: „Ki ül melletted?”- A válasz ez volt: „A Hazugság.”
Milyen sorrendben ülhettek az istenek?
3.2. Három lányt: Erikát, Andreát és Szilvit moziba hívta Gábor, Zoli és Laci. A Gyűrűk Urát, Harry Pottert és a Star Wars-t választották. Egyik film este 6-kor, a másik 7-kor, a harmadik 8-kor kezdődik (nem biztos, hogy ebben a sorrendben). Gábor Szilvivel ment moziba. Andrea a Star Wars-t nézte meg. Zoli 8-kor ment moziba, de nem Erikával. Laci később ment moziba, mint az a fiú, aki a Harry Pottert nézte meg. Hány órakor ment moziba Erika?
3.3. A hét vezér közül valaki eldugta Lehel kürtjét. Tudták, hogy a tettes csak Előd, Ond vagy Tas lehetett. Ezért gyűlést szerveztek, ahol meghallgatták a gyanúsítottakat. Ők a következőket állították: – Nem Ond a tettes. – mondta Előd. – Tas biztosan ártatlan.- mondta Ond. Viszont Tas olyan halkan beszélt, hogy nem értették mit mondott. Álmos látta, ki a tettes, de csak annyit árult el, hogy a bűnös igazat mondott, a két ártatlan pedig hazudott. Ki dugta el Lehel kürtjét?
4 pontos feladatok:
4.1. Egy vonaton utaznak Smith, Robinson és Jones a fűtő, a fékező és a mozdonyvezető, de nem biztos, hogy ebben a sorrendben. A vonaton utazik továbbá három üzletember, akiket ugyanígy hívnak: Mr. Smith, Mr. Robinson és Mr. Jones.
– Mr. Robinson Detroitban lakik.
– A fékező pontosan félúton lakik Chicago és Detroit között.
– Mr. Jones 20 ezer dollárt keres évente.
– A fékező közvetlen szomszédja, az egyik utas, pontosan háromszor annyit keres, mint a fékező.
– Smith billiárdban meg szokta verni a fűtőt.
- A fékezővel azonos nevű utas Chicagóban lakik.
Kérdés: hogy hívják a mozdonyvezetőt?
4.2. Mackó mama egy játékot játszott a 3 nagyon okos bocsával. Leültette őket egymás mögé úgy, hogy Mackó Misi az előtte ülő két testvérét, Mackó Lackót és Mackó Mártit láthatta, Mackó Lackó csak Mackó Mártit, míg Mackó Márti egyiküket sem. Mackó mama bekötötte a bocsok szemét. Elmondta nekik, hogy egy zsákból – amelyben három piros és két kék sapka van – mindegyiküknek a fejére tesz egy sapkát. Miután ezt megtette, levette a szemükről a kendőt, és először megkérdezte Misit, hogy szerinte milyen sapka van a fején. Misi nem tudta megmondani. Ezután kérdezte Lackót, hogy ő tudja-e, milyen sapka van a fején. Ő sem tudta megmondani. Majd végül Mártit is megkérdezte. Meg tudta-e mondani Márti, hogy milyen sapka van a fején, és ha igen, akkor mit mondott?
4. 3. Egy villamos vonalon a két végállomásról mindig egyszerre indul egy-egy villamos. A menetidejük 40 perc, és mindegyik szerelvény 8 percet várakozik a végállomáson. Legfeljebb hány szerelvény közlekedhet ezen a vonalon, ha a végállomáson egyszerre legfeljebb egy villamos tartózkodhat?
4.4. Egy 67 tagú társaságban fiúk, lányok, férfiak és nők vannak. A társaságról még a következőket tudjuk:
– a nőneműek száma osztható 5-tel
– a nők száma megegyezik a hímneműek számával
– a fiúk vannak a legkevesebben

– a fiúk, a férfiak, a lányok és a nők száma is prím
Hány lány van a társaságban?
5 pontos feladatok:
5.1. Van 5 ház, mindegyik más színű. Minden házban egy más-más nemzetiségű és foglalkozású személy lakik. Minden háztulajdonos másféle italt részesít előnyben és másféle állatot tart. Tudjuk továbbá, hogy:
– A piros házban az angol lakik.
– A svédnek kutyája van.
– A dán a teát szereti.
– A zöld színű ház közvetlenül balra van a fehértől.
– A zöld ház lakója kávét szeret inni.
– A tanár madarakat tart.
– A sárga színű ház lakója focista.
– A középső ház lakója tejet szeret inni.
– Az első házban a norvég lakik.
– Az orvos a macskatulajdonos mellett lakik.
– Aki lovakat tart, az a focista mellett lakik.
– A fodrász sört szeret inni.
– A német tűzoltó.
– A norvég a kék ház mellett lakik.
– Az orvos egyik szomszédjának kedvenc itala a víz.
Kérdés: ki tart halat?
5.2. Sherlock Holmes-nak egy gyémánt nyakék elrablásának ügyét kell felderítenie. A nyakék tulajdonosa, Mrs. Smith jelentette be a rablást. Az ügyben négy gyanúsítottat hallgattak ki:
Mr. Robinsont, Mrs. Davidsont, Lady Margaret-et és Sir Hanry-t. A nyomozás során a következő dolgok derültek ki:
– Ha Sir Hanry ártatlan, akkor Mr. Robinson bűnös és Lady Margaret ártatlan.
– Ha Mr. Robinson bűnös, akkor Mrs. Davidson bűntárs vagy Sir Hanry ártatlan.
– Ha Sir Hanry bűnös, akkor Mr. Robinson is az.
– Ha Mrs. Davidson bűnös, akkor Lady Margaret bűntárs.
Kit/Kiket vádolt meg végül Scherlok Holmes? (Ha esetleg több bűnös is volt, akkor nem csak az egyiküket, hanem mindet megvádolta, és csak azt/azokat, aki(k)ről biztosan tudta, hogy bűnös(ök).)
És a megoldások:
1.1. 21; **1.2.** hétfő; **1.3.** 8; **2.1.** 6; **2.2.** sárga; **2.3.** Nyuszi Pista Répafalván, a felesége Káposztafalván született; **2.4.** 7; **2.5.** 2, 2; **3.1.** B-H-I; **3.2.** 7-kor; **3.3.** Ond; **4.1.** Smith; **4.2.** piros; **4.3.** 12; **4.4.** 53; **5.1.** német; **5.2.** Mr Robinson (csak)

Barbarics Márta (ELTE matematika tanári MA 2. évf.)

Amíg az első két feladat beadott megoldásait javították szorgalmasan a szervezők, Szabó Zsanett és Horváth Manuéla egy mesével készült a gyerekek számára. Természetesen a mesében is elrejtett feladatokat kellett megoldani a továbbhaladáshoz. A mese innen származott:
Lopovok, L. M.: Szórakoztató matematika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
A „A sakkozó hercegnő”-beli hős feladatait oldattuk meg a gyerekekkel.

Szabó Zsanett és Horváth Manuéla (ELTE Matemeatika Bsc. tanári szakirány, 3. évf.)

A mesebeli hős feladatainak megoldására is jártak a pontok, amiket végig a táblán vezettünk. Az utolsó pontszerzési lehetőség pedig egy kvíz volt, amit Kovács Dorottya és Beregszászi Eliza állítottak össze. Itt minden csapat kapott egy-egy villámkérdést, amit ha megválaszoltak, járt a pont, ha nem tudták vagy rosszul válaszoltak, akkor a többi csapat rabolhatott. Itt nagyon sok kérdéssel készültünk, hogy a fennmaradó idő függvényében használhassuk fel őket, de a két órába csak egy kör fért bele az alábbi kérdésekkel:

1. Egy átlátszatlan zacskóban, 18 db golyó van 5 piros, 6 fehér és 7 zöld színű. Legfeljebb hány darab golyót lehet kivenni bekötött szemmel úgy, hogy a visszamaradtak között legyen biztosan három darab piros golyó?
2. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben van 5-ös számjegy?
3. Van egy mérlegünk melynek egyik serpenyőjébe tehetünk mérősúlyokat, a másikba pedig a mérendő tárgy kerül. Szeretnénk mérni minden egész kg-ot 1 kg-tól 15 kg-ig, a lehető legkevesebb mérősúllyal. Milyen súlyokat válogassunk ehhez?
4. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben van ismétlődő számjegy?
5. Hányféleképpen lehet egy négyszemélyes lift négy utasát kiválasztani 5 leány és 5 fiú közül úgy, hogy egyszerre 2 leány és 2 fiú utazzon?
6. A tengeren négy hajó halad együtt, közel egymáshoz: bármely két hajó távolsága 3 km. A hajók között van teherszállító, olajszállító és utasszállító hajó. Milyen hajó a negyedik?
7. Páros-e vagy páratlan az első 100 prímszám összege? (Indokolni is kell a választ.)

Kovács Dorottya és Beregszászi Eliza (ELTE Matemeatika Bsc. tanári szakirány, 3. évf.)

Végül ünnepélyes eredményhirdetés következett, minden csapat a helyezésének megfelelően több-kevesebb édességgel, finomsággal és helyezéstől függetlenül sok élménnyel gazdagodott. Mi nagyon élveztük a programot, és amikor köszönetet mondunk a gyerekeknek a kétórás intenzív fejtörésért, az egyik fiú meglepetten annyit mondott: „Ez két óra volt?! Fél órának se tűnt.”

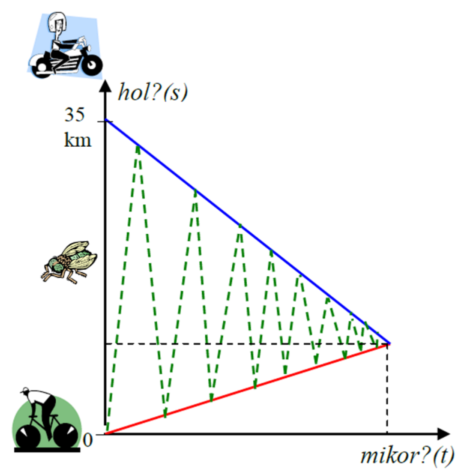
Horányi Gábor

Minden nézőpont kérdése

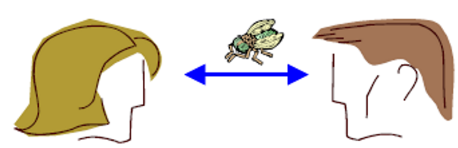
A „Játéktól a kutatásig” program keretében tartott két előadásom az alábbi feladatokat járta körül. Mindegyik lényeges eleme a nem szokványos nézőpont felismerése. Ha képesek vagyunk arra, hogy kilépjünk gondolkodásunk megszokott keretei közül, nem csak hatékonyabbak lehetünk a problémamegoldásban, hanem egy új, teljesebb, mélyebb képet nyerhetünk a világról.

A légy útja

Egy 10 km/h egyenletes sebességgel haladó kerékpáros és egy 25 km/h egyenletes sebességgel haladó motoros egyszerre indul egymás felé. Az indulás pillanatában 35 km távolságra vannak egymástól. A kerékpáros és a motoros között ez idő alatt egy légy repked ide-oda 40 km/h sebességgel. A légy a kerékpárostól indul el a motoros felé pontosan akkor, amikor a kerékpáros is elindul, de amint eléri a motorost, visszafordul és visszarepül a kerékpároshoz. Amint újra találkozik a kerékpárossal, megfordul és újra a motoros felé repül, s aztán így repked tovább, amíg a kerékpáros és a motoros találkoznak.



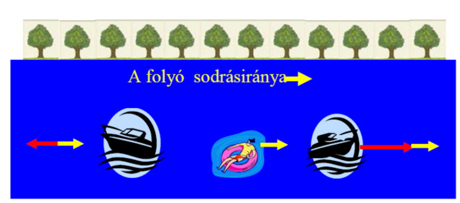
A grafikonról leolvasható a légy útja. De vajon hány darabból áll ez az út? Az útszakaszok összeadásánál jobban járunk, ha az időre koncentrálunk.



A légy addig fog a két utazó között föl-le járni, ameddig nem találkoznak. Mivel a légy kiterjedése, lassulása, gyorsulásaa elhanyagolható, elmondható, hogy lényegében végig egyenletesen mozgott. Így utja sebességének és a mozugásra fordított időnek szorzata. Matematikai szempontból egy mértani sorral van dolgunk, de a megoldás szempontjából ennek felismerése inkább hátrány, mint előny.

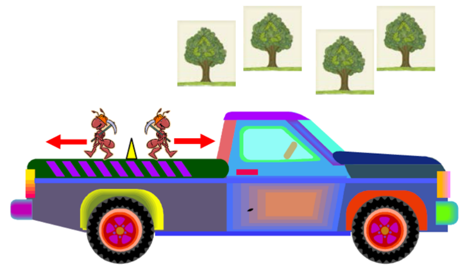
Sodródás a folyón

Egy folyóban sodródó úszóövön egy ember ül. Elhalad mellette két motorcsónak úgy, hogy ellenkező irányból, de egyszerre érnek az emberünkhöz. A motorcsónakok a parttal párhuzamosan haladnak, sebességük állóvízben azonos lenne (a motorteljesítményük azonos). 1 perccel később a csónakok egyszerre megfordulnak és azonos motorteljesítménnyel visszafelé haladva közelednek a folyóban sodródó emberünk felé.



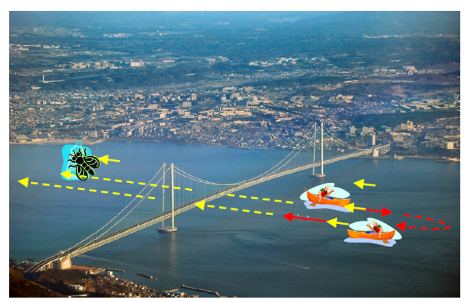
Melyik ér vissza az emberhez előbb?

Az ábra azt mutatja, hogyan alakulnak a sebességek a parthoz képest.
Ám az úszógumin ülő megfigyelő szempontjából minden másképpen néz ki. Ezt a következő ábra mutatja:



Az ábra egy autót mutat, melynek platóján hangyák menetelnek, miközben az autó egyenletesen halad előre. Ha azonos a sebességük és egyszerre haladtak el a sárga ék mellett, s azután egyszerre fordulnak vissza az ék felé, vajon melyik ér vissza előbb az ékhez?
Mi köze van mindennek a folyós feladathoz?
A válasz nyilvánvaló. Ha a feladatot az úszógumin utazó szemszögéből írjuk le, egyértelmű, hogy a csónakok egyszerre érnek vissza a gumihoz, akár a hangyák a sárga ékhez. Ha konkrét számadatokat (sebesség, idő) felhasználva vizsgáljuk a problémát, könnyen belátható, hogy a csónakok mindig azonos távolságra lesznek az úszógumitól.

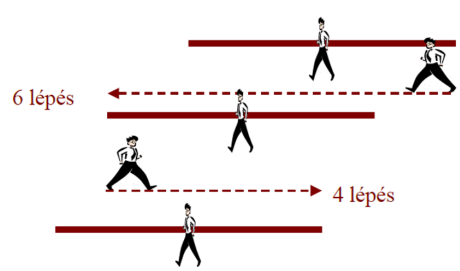
A halász és az elvesztett lélekmelegítő



Egy halász evez a csónakjában a folyón felfelé. Egyszer csak észreveszi, hogy a lélekmelegítőnek szánt itókás üveg kiesett a csónakból.
Biztosan a hídnál történt, gondolja, majd megfordul, és az evezés erősségét fenntartva elindul a folyón lefelé. Így a híd alatt 500 m-rel a megfordulást követően 5 perc múlva eléri a palackot.
Mekkora a folyó sebessége?
A feladat első pillantásra adathiányosnak tűnik. Hogyan is lehetne megoldani, ha nem tudjuk, mekkora sebességgel evez a halász!
De a helyzet korántsem ilyen reménytelen. A palackra rászállt egy légy, s amit a légy lát, nagy segítség lehet mindnyájunknak! Ha alkalmazzuk az előző feladat logikáját, világos, hogy a palacktól való távolodás és a hozzá való közeledés ideje azonos volt. Ez alatt a palack 500 métert sodródott lefelé. Így a folyó 10 perc alatt 500 métert tett meg, azaz sebessége 3 km/h. A feladat természetesen megoldható paraméteresen, a csónak sebességének felhasználásával. Ennek értéke azonban kiesik az egyenletekből.

A rúd hossza

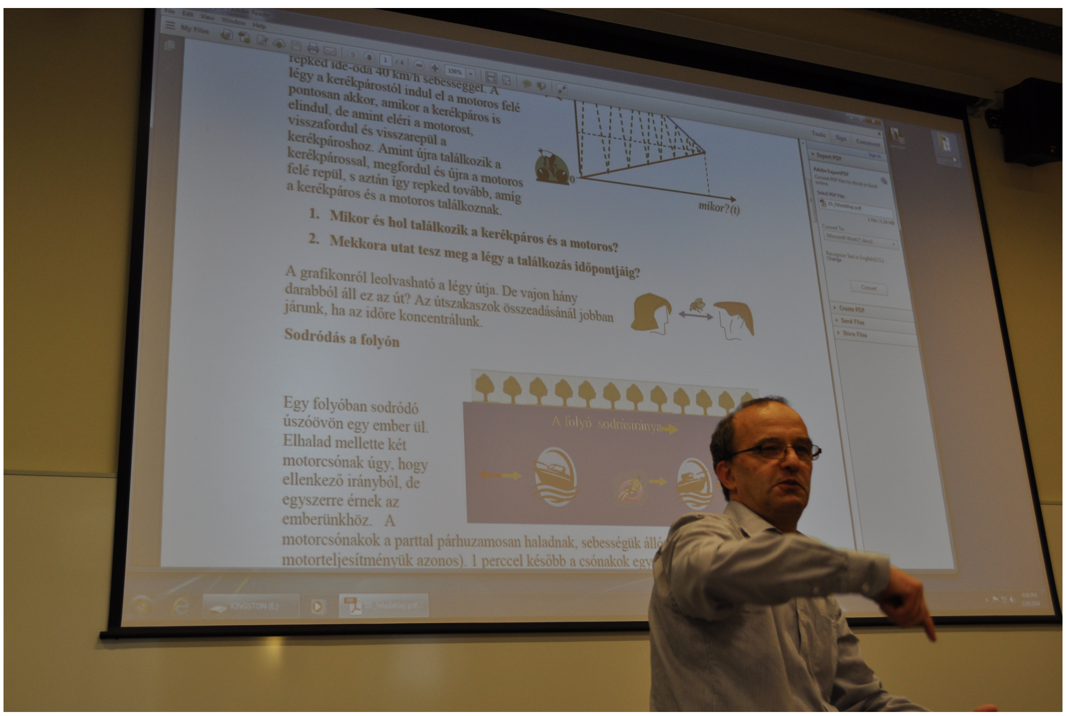
Egy ember visz egy rudat. Egy másik gyors léptekkel elhalad mellette, s 6 lépést megtéve a rúd végétől az elejéig ér. Azután nyomban megfordul, s 4 lépést megtéve visszajut a rúd mozgásával szemben haladva az elejétől a végéig.



Hány lépésnek találná a rudat, ha a rúd állna?

Vajon mit jelent a „lépés” kifejezés ebben a feladatban? Távolságot? Időt? Mindkettőt?
Mennyit ment előre a rúd, mialatt emberünk a végétől újra a végéig ért?
Mennyit halad előre a rúd gyorsléptű emberünk minden lépése során?
A feladat megoldásához az a felismerés vezet, hogy a „lépés” egyszerre jelent utat és időt. Itt a lépés a mérést végző (tehát a rúd mellett elhaladó) személy lépésére vonatkozik. A rúd végének helyzetváltozására fókuszálva megállapíthatjuk, hogy a rúd 2 lépés utat tett meg 10 lépés idő alatt, azaz a rúd sebessége lépésnyi időnként 1/5 lépésnyi rúd. Így 6 lépés alatt a rúd 6/5 lépésnyi utat tett meg, azaz hossza $6 - \frac{6}{5} = 4{,}8$ lépés. Az eredményt könnyen ellenőrizhetjük. 4 lépés idő alatt a rúd 0,8 lépés utat tesz meg. $4 + 0{,}8 = 4{,}8$.

A világ gyorsan változik, talán gyorsabban, mint szeretnénk. A mai világban a legsikeresebbé az embereket a rugalmasság, a kreativitás teszi.. Az iskolának, amely a kreativitás ősi ellensége, is meg kell változnia. Meg kell értenünk, hogy egy ötletes, de hibás válasz tanítványaink fejlődése szempontjából akár többet érhet, mint a besulykolt, megfellebbezhetetlen, megszokott. Merjünk változtatni nézőpontunkon, merjünk eltérni a megszokottól. Hogy igazam van-e ebben, hogy használ-e a megszokott helyett kínált szokatlan, a bizonyosság helyett kínált bizonytalan tanítványainknak? Döntse el ki-ki maga. Mert végül is minden nézőpont kérdése!



Róka András

VIS VITALIS

Az életerő elmélet (1796) – mely szerint az élő szervezetetek különleges és utánozhatatlan módon állítják elő vegyületeiket – Carl Gren (1760 – 1798) nevéhez fűződik. Kimondása szükségszerű volt, hiszen különösen az alkímia korában az anyag megváltoztatásának egyetlen módja volt ismeretes, a tűz alkalmazásával a hevítés, az égetés. Az élő szervezet anyagai azonban hőérzékenyek. A faszén gyártása – a fa száraz lepárlása – érzékelteti talán a legjobban, hogy a fa hevítéssel ugyan átalakítható, de elemi szén jellegű anyag marad vissza (hiszen a bomlástermékkel sokáig nem foglalkoztak, így nem is tudták, hogy azok között is akad szerves vegyület.) Ma már szinte megdöbbentő, hogy 1815-ben még az egyik legnagyobb kémikus, Berzelius is így vélekedett:

> *„Minden ismeretünk ellenére, az állati testben végbemenőjelenségek zömének oka oly mélyen van rejtve tekintetünk elől,hogy bizonyára sohasem fogjuk felfedezni.*
> *Ezt a rejtett okot életerőnek nevezzük.”*

A vis vitalis elmélet bukásában érdekes, hogy 1828-ban Wöhler a sikerhez vezető vegyületet, az ammónium-cianátot az alkímisták módszerével megegyezően hevítette! Óriási szerencse volt, hogy a képződött karbamid stabil vegyület. A felfedezés a szerves kémia robbanásszerű fejlődéséhez vezetett. Gyorsulóan növekvő ismereteink ellenére az élet születése mégiscsak csoda, legyen az a tavaszi megújulás, a magvak életre kelése vagy a petesejt megtermékenyülése. Mi az az „erő”, ami lehetővé teszi az egyed dinamikus fejlődését fiziológiás hőmérsékleten?

Nem is gondolnánk, hogy a kezdeti élettani ismeretek is az égés megismerése során alakultak ki. Mayow a zárt rendszerbe az égő gyertya mellé egy egeret is helyezett. Megállapította, hogy az egérnek ugyanarra van szüksége az életben maradáshoz, mint amire a gyertyának az égéshez. Ekkor alakult ki – a tankönyvekből sajnos máig kitörölhetetlen – „lassú égés” fogalma. Az csak a biológiai energiatermelés reakcióinak feltérképezése során derült ki, hogy szervezetünkben a szőlőcukor, vagy a zsírsavak nem közvetlenül reagálnak az oxigénnel. A szerves savak a citrát- (vagy Szent-Györgyi–Krebs-) ciklusban oxidálódnak (biológiai dekarboxileződés), míg az oxigén a terminális oxidáció során hasznosul. A lényeg az, hogy a gyertya, vagy a gyufaszál „egyszerű” égéssel szemben máshol keletkezik a szén-dioxid és máshol a víz! Az oxidáció és a redukció ilyen térben történő szétválása a galvánelemek működésére emlékeztet. A legmodernebb „galvánelemek” a tüzelőanyag-cellák, melyekben a reakció során az energia nem hő formájában szabadul fel, hanem alacsony hőmérsékleten elektromos munka végzésére fordítódik. A hidrogén és az oxigén 2:1 térfogat arányban durranógázt alkot, ami lángtünemény kíséretében heves robbanással ég el. Elektrokémiai úton vezetve a reakciót a hidrogén elektronjai (a platina elektródfém segítségével) fémes vezetőn keresztül jutnak az oxigénelektródra, miközben elektromos munkát végeznek (pl. elektromotort hajtanak meg). A töltéskiegyenlítődés érdekében a hidrogénből keletkező hidrogénionok (protonok) egy speciális membrán (Nafion) segítségével jutnak át az oxigén elektródon elektronfelvétellel képződő oxidionokhoz. Bár a technikai eszközök működése még elmarad az egyelőre utánozhatatlan biológiai működéstől, mégis segít megérteni a sejtek parányi erőműveinekműködését. A biológiai oxidáció azért játszódik le fiziológiás hőmérsékleten, mert a mitokondriumok nem parányi hőerőművek, hanem biológiai tüzelőanyag-cellák. Éppúgy elektronok és protonok vándorlása játszódik le bennük, mint a galvánelemekben, csak más méretekben és egy kicsit másképpen. Az élő szervezetben az elektronvezetés csak rövid távú(elektrontranszport-lánc), ami a fémes vezetéssel szemben alkalmatlan elektromos munka végzésére. Ezért a mitokondriumokban – a tüzelőanyag-cellával ellentétben – a protonok irányított vándorlása (a proton-transzport) végez elektromos munkát.

A protonoknak, és ezzel a sav-bázis reakcióknak kitüntetett szerepe van az élettani folyamatokban. A proton átlépése – mivel elektronburok hiányában nem taszítja a reakciópartner – nem igényel aktiválási energiát, ezért szoba hőmérsékleten lejátszódik. A proton átlépése azonban elektronpár átrendeződésre készteti a fogadó molekulát, és ezzel alacsony hőmérsékleten is reakciót indíthat be. Remek példa erre a tömény kénsav reakciója hangyasavval és kristálycukorral. Egyik anyag sem tudja visszaadni a protont, ezért mindkét molekula elektron-átrendeződésre kényszerül. Annak ellenére, hogy a kezdő lépés (a proton átvétele) mindkét esetben ugyanaz, a reakció lefutása nagyon eltérő termék képződéséhez vezet. A protonálthangyasav – elektronpár-átrendeződéssel – szén-monoxid molekula kiválásával stabilizálódik. A cukor molekulák esetében azonban az amúgy is kapcsolódó szénatomok egymással stabilizálódnak, ezért szén-monoxid-fejlődés helyett a cukor elszenesedik. A faszén gyártásával szemben azonban ez a reakció nem igényel hevítést, sőt exoterm jellege miatt a rendszer magától forrósodik fel. A savkatalízis mögött azonban szintén az elektromosság, az elektrosztatikus erőkmunkája rejlik.

A játéktól a kutatásig

II. rész
2014

2014-ben a A Varga Tamás Tanítványainak Emlékalapítványa újabb pályázati támogatást (NTP-MTI-13) nyert el, így folytathattuk a megkezdett sorozatot.
A következő alkalmak időpontja: 2014. május 9–10. és május 30–31.
2014. május 9-én pénteken délután fél háromtól és május 10-én szombaton 9 órától a diákprogram helyszíne volt az ELTE Tanító és Óvónőképző Kara (1126 Budapest Kis János altb. utca 40.)
Ez a program a Szendrei Julianna Emlékkonferencia egyik szekciójaként került megrendezésre.
Szendrei Julianna (1948–2013) matematikatanár, a magyar matematikatanítás nemzetközileg is elismert kiemelkedő egyénisége. 1970-től az OPI munkatársaként részt vett a Varga Tamás által vezetett csoportban a matematikatanítás korszerűsítési munkálataiban. 1991-től haláláig az ELTE Tanító és Óvónőképző Kar Matematika tanszékének tanszékvezetője volt.
A konferencia egyik szekciója volt **A játék matematikája**, melynek a címe idézet Szendrei Julianna egyik könyvének címéből. Ehhez a témához csatlakozott a diákszekció „A játéktól a kutatásig” címmel. Ezen a diákprogramon is a diákok mellett egy-egy foglalkozáson megjelentek olyan tanárok is, akik egyébként a konferencia többi szekcióit látogatták.
A diákszekció programja **2014. május 9–10.**
Csapodi Csaba: A számelmélettől a statisztikáig - a GeoGebra lehetőségei a matematika különböző területein
Juhász Péter: „Lehetséges ez?”
Lénárt István: Számok és formák
Jaakko Joki: Játék a platoni testekkel
Pintér Klára: Bűvészkedjünk, játsszunk!
Gál Péter: „Könnyű, mint egy két darabos puzzle”. Előadás és játék ördöglakatokkal.
Radnóti Katalin és *Nagy Mária:* Nemlineáris jelenségek
Kósa Tamás: „Pepita”

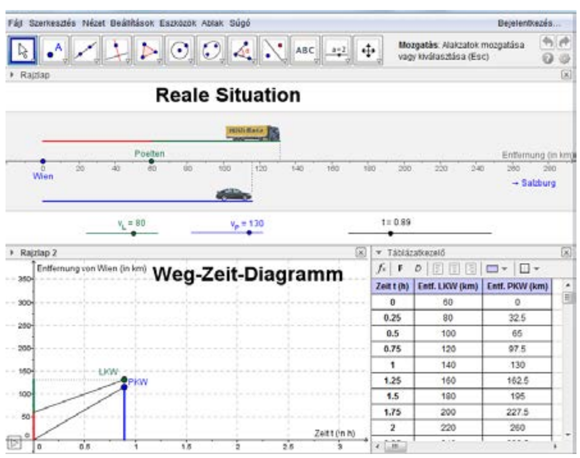
Csapodi Csaba

A számelmélettől a statisztikáig – a GeoGebra lehetőségei a matematika különböző területein I.

A GeoGebra interaktív, dinamikus szoftver az egyik legelterjedtebb a hasonló számítógépes programok közül. Ennek oka ingyenessége, kis mérete és egyszerű kezelhetősége mellett az, hogy nagyon sokrétűen használható a matematika különböző területeinek bemutatására. Az persze kézenfekvő, hogy egy ilyen programmal széles körben lehet függvényeket ábrázolni vagy geometriai feladatokat megoldani. Az viszont már nem ennyire nyilvánvaló, hogy hogyan hívható a szoftver segítségül a statisztika, a kombinatorika, a számelmélet vagy a valószínűségszámítás tanításának során.

A diákokkal ezen a délutánon együtt töltött 90 perc három részből állt. Először közösen átbeszéltük, hogy a matematika tanításának melyek azok a területei, ahol érdemes és hasznos számítógéppel megtámogatni a tanítás folyamatát. Majd egy gyorstalpaló tanfolyam keretében mindenki elsajátíthatta a GeoGebra használatának legalapvetőbb lépéseit. Végül egy újonnan fejlesztett geometriai tippelős játékkal fejeztük be az együtt töltött időt.

Néhány példa arra, hogy milyen lehetséges alkalmazásokat vettünk szemügyre a foglalkozás első részében.

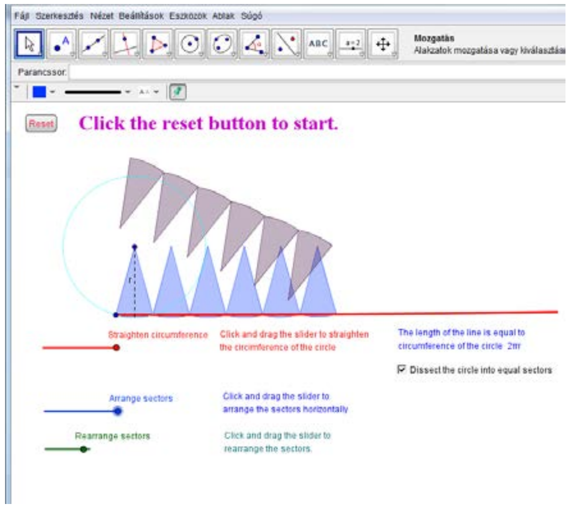


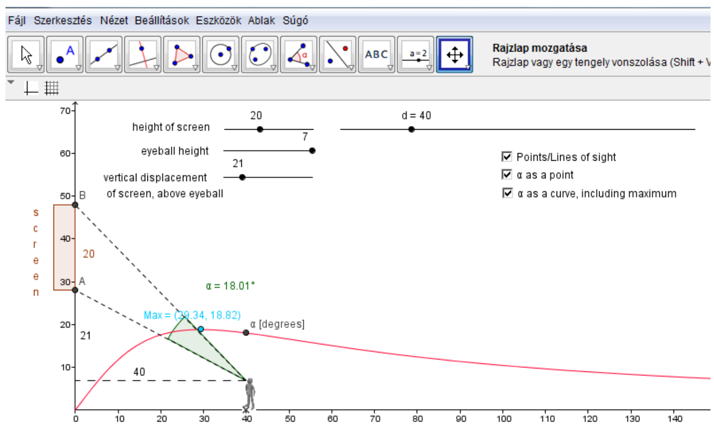
Egy klasszikus probléma a különböző sebességgel haladó gépjárművek idő- és útbeli viszonyait vizsgálja, ehhez tekintettünk meg egy fájlt, mely több formában egyszerre ábrázolja a járművek különböző (és persze szabadon változtatható) út-idő-sebesség adatait.

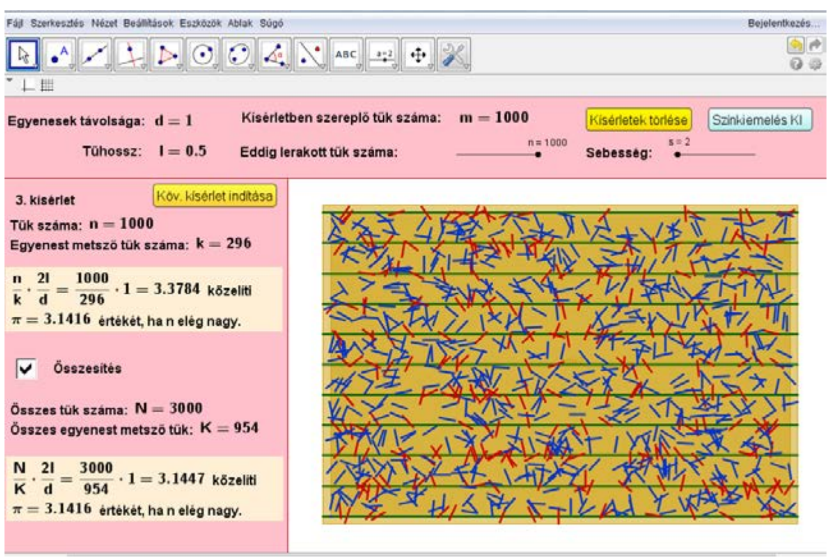
A kör kerületéből már nyolcadik osztályos diákokkal kitalálhatjuk a kör területének képletét, melyben sokat segíthet az alábbi – sokféle beállítást lehetővé tevő – színes alkalmazás.

Szintén jól használható lehet az alábbi program, amely egy képernyő látószögét ábrázolja a néző különböző elhelyezkedése esetén és segít megkeresni azt a pontot, ahonnan ez a szög a legnagyobb. A beállítható paraméterek száma itt is nagyon széles.

A Buffon-féle tűprobléma (a π értékének közelítése egy parkettára dobott tűk segítségével) vizsgálatakor szintén jó szolgálatot tehet egy olyan alkalmazás, amely megkönnyíti számunkra akár több ezer kísérlet végrehajtását pár másodperc alatt és az eredmények látványos megjelenítését.





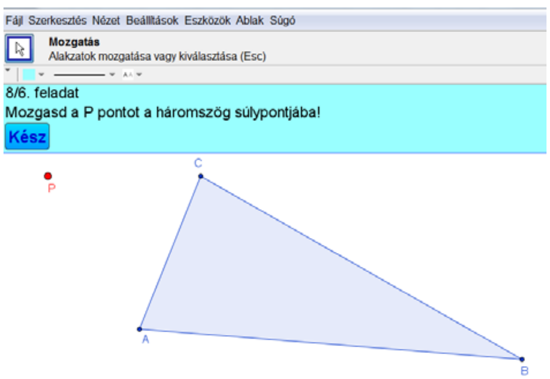


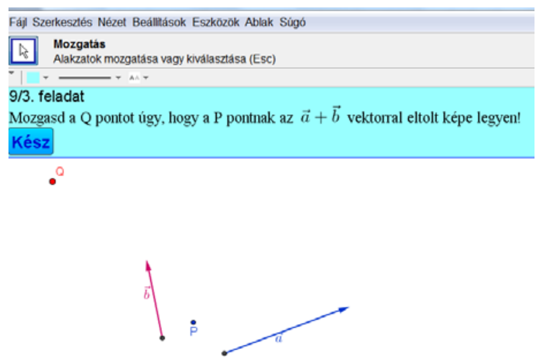
A fenti példák jól mutatják, hogy melyek a matematika tanításának azon területei, ahol jól használható a GeoGebra (vagy más, hasonló szoftver) a tanítás folyamatának megsegítésében.

A teljesség igénye nélkül néhány ilyen terület:

- időben változó folyamatok több szempontú megközelítése és demonstrálása;
- sejtések megfogalmazása;
- nehezen elvégezhető kísérletek bemutatása;
- diszkusszió elvégzése stb.

A délutánt egy olyan geometriai tippelős játékkal zártuk, melynek során szakasz felezőpontjának, kör középpontjának, pont tükörképének vagy adott vektorral vett eltoltjának a helyét; háromszög területét, hegyesszög szögfüggvényértékét, stb. kell a felhasználónak megtippelnie. A tipp jóságát a program értékeli és a jó megoldás berajzolásával segíti a diákok ismereteinek elmélyítését játékos formában. Két képernyőkép a fentiek bemutatására:





Juhász Péter

Lehetséges ez?

Bevezető

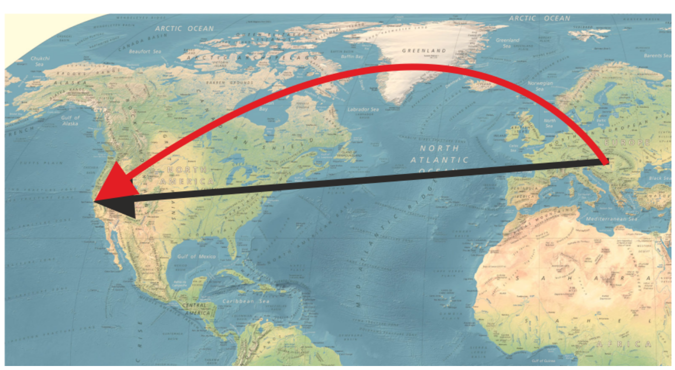
A Játéktól a kutatásig programban résztvevő diákok életkora széles skálán mozog. A mostani alkalmon is volt nyolcadikos és tizedkettedikes diák is. Ez a sajátosság abban az értelemben meghatározza a tanár dolgát, hogy csak olyan problémákat adhat, amiknek nincs komoly előfeltétele, minden diák a szükséges tárgyi tudással rendelkezik a feladatok megoldásához.
4 ilyen feladattal próbáltam gondolkodásra bírni a résztvevőket. Ezek a következők voltak:

Feladatok

Első feladat

Ha Budapestről San Franciscoba repülünk, akkor a repülés során látjuk Grönlandot, sőt, még az is lehet, hogy el is repülünk felette.

Ha ránézünk erre a térképre, akkor nem világos, hogy miért tesz ekkora „kerülőt” a gép. Kis beszélgetés után megállapodtunk abban, hogy a térképek „nem jók” abban az értelemben, hogy ha veszünk két pontot a Föld felszínén (amit most egy gömbnek képzelünk el), akkor az őket összekötő legrövidebb út képe a térképen nem az a szakasz lesz, aminek a két végpontja a két pont képe. Az „igazi” legrövidebb út képe ez:



Kimondták a gyerekek, hogy ez azért van, mert minden térkép kénytelen „torzítani”, a gömb nem „teríthető ki” síkba, ha egy labdát felvágunk, akkor hiába nyomkodjuk, nem lesz belőle egy „lapos” bőrdarab stb. Az ő nyelvükön megfogalmazták a Gauss által 1827-ben bizonyított *theorema egregium* egyik fontos következményét, amivel a hétköznapokban is szembesülünk. Mégpedig azt, hogy a gömbfelület nem képezhető le izometrikusan a síkba. Vagyis minden síktérképnek szükségszerűen torzítania kell. A *theorema egregium* bizonyítása nehéz ennek a korosztálynak, magát az állítást sem tudjuk precízen kimondani. Mégis ehhez kapcsolódott az első feladat.

1. feladat. Találjunk meggyőző gondolatmenetet (bizonyítást) arra, hogy a gömb felületének pontjait nem tudjuk távolságtartóan a síkba leképezni. Vagyis azt kellene „belátni”, hogy bármely leképezés esetén lesz legalább két olyan pont, amik síkbeli távolsága nem egyezik meg a gömbön mért távolságukkal.

Itt tehát nem nekik kell eldönteniük, hogy *Lehetséges ez?* vagy sem, hanem én elárultam, hogy a negatív választ kell meggyőzően alátámasztaniuk.

Második feladat

Maradjunk még a gömb felszínén és álcázzuk a következő kérdést is földrajzi kérdésnek.

2. feladat. El lehet-e helyezni 5 várost a Föld felszínén úgy, hogy semelyik 4 nincs egy (zárt) félgömbön?

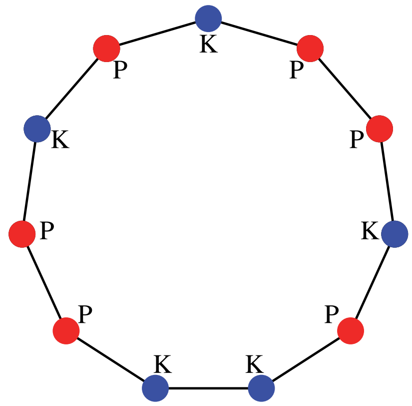
Másképpen fogalmazva: igaz-e, hogy akárhogy helyezünk el 5 várost a földgömbön, mindig lesz 4, amik egy (zárt) félgömbön vannak?

Itt tehát már nekik kell eldönteniük, hogy *Lehetséges ez?* vagy sem, semmilyen információt nem kaptak arra nézve, hogy bizonyítaniuk kell, vagy ellenpéldát keresniük.

Harmadik feladat

Elhagyjuk a földrajzos környezetet és egy „száraz” matematikai kérdés következik:

3. feladat. Ki lehet-e színezni egy szabályos 11-szög csúcsait két színnel úgy, hogy nincs egyszínű, egyenlő szárú háromszög?



Az ábrán látható színezés nem jó, mert több egyszínű, egyenlő szárú háromszöget is találhatunk rajta. Ez azonban nem jelenti azt, hogy nem tudunk jó színezést találni. A kérdés nyitva maradt, vagyis, hogy *Lehetséges ez?*

Negyedik feladat

Végül pedig egy feladat, aminek az első része könnyű, mindenki hamar megoldja, a második része viszont nehéz, így az okos gyerekek számára is megfelelő kihívást jelent.
4. feladat. Három kupacban kavicsok vannak és a kupacokat lépésekben lehet változtatni. Egy lépésben két dolog közül választhatunk:

- Két kupacot lehet egyesíteni. (Vagyis: $a,\ b \to a + b$.)
- Egy páros elemszámú kupacot két egyenlő elemszámú kupacra lehet szétválasztani. (Vagyis: $2a \to a,\ a$.)

a. Ha kezdetben 5, 10, illetve 15 kavics van a kupacokban, akkor elérhető-e, hogy valamikor minden kupacban 5 kavics legyen?

b. Mi a helyzet akkor, ha az elején 5, 49 és 51 kavics van a kupacokban és a végén csupa olyan kupacot szeretnénk, amikben 1 kavics van?

Itt sem tudjuk, hogy melyik esetben lehet elérni a célt. Mind a négy lehetőség szóba jöhet első látásra.

Segítségek

Miután elhangzottak a problémák a diákok gondolkozni kezdtek. Többnyire 2-3 fős csoportokban, de volt aki egyénileg tette ezt. A kísérő és érdeklődő tanárok is bekapcsolódtak a gondolkodásba. Nagyjából 30 perc gondolkodás után minden feladatról beszéltünk pár szót, kaptam a megoldáshoz kisebb-nagyobb „lökést” a gondolkozók.

Első feladat

Keressünk három pontot a gömbön, amik közül bármely kettő egyenlő távolságra van egymástól:

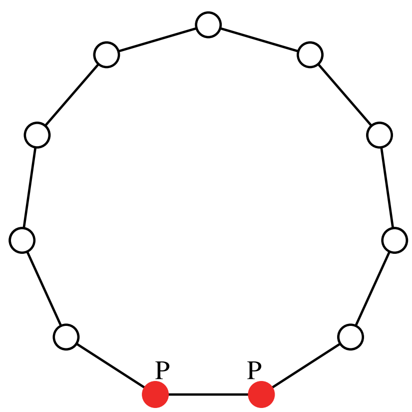
Mi lesz ezeknek a képe a síkban?
Még egy pontot jól megválasztva már kapunk is ellentmondást!

Második feladat

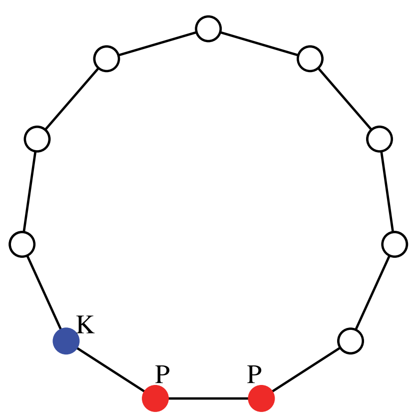
Itt a segítség csak annyi, hogy nem lehetséges így megadni a pontokat. Vagyis a bizonyítandó állítás az, hogy *a gömb felületén bármely 5 pont között mindig van 4 olyan, amik egy zárt félgömbön vannak.*

Harmadik feladat

Tegyük fel, hogy ki lehet így színezni a 11-szöget. Nézzük meg először azt az esetet, ha van két szomszédos azonos színű pont:



Ha nincs egyszínű egyenlő szárú háromszög, akkor mely pontoknak tudjuk a színét biztosan?



A két pirostól balra lévő pont feltétlenül kék színű ebben az esetben. Folytassuk ezt a gondolatmenetet! Mi van akkor, ha nincs két szomszédos azonos színű csúcs?

Negyedik feladat

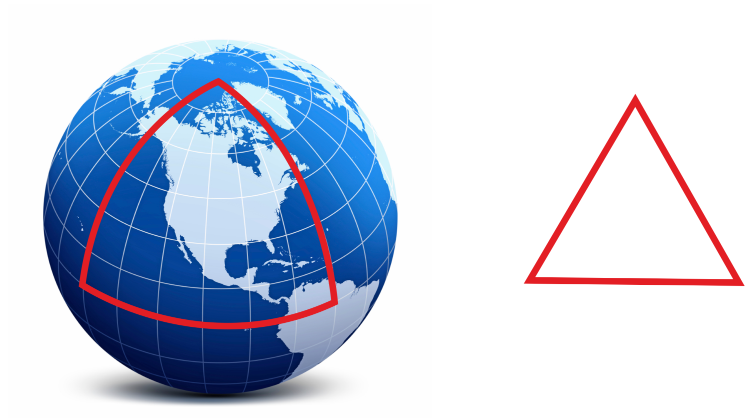
Ebben az esetben csak az eredményt árultam el, vagyis azt, hogy az a) feladatban elérhető a kitűzött cél, de a b) feladatban nem.

Megoldások

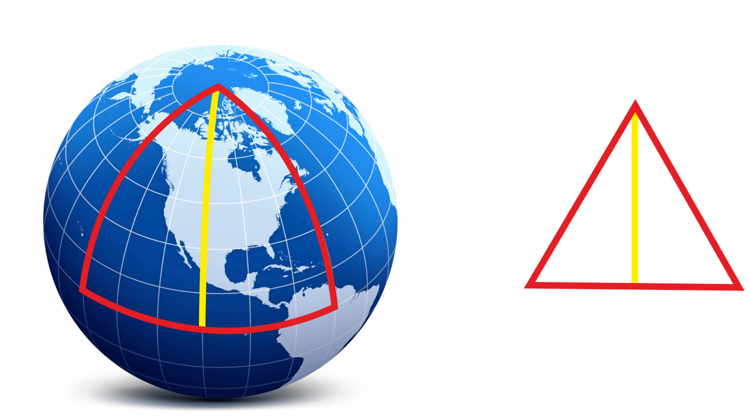
A program végén a gyerekek kérésére minden feladatot megbeszéltünk. Tekintsük át a megoldásokat:

Első feladat

A három kijelölt pont képe szükségképpen egy szabályos háromszög három csúcsa.



Innen több befejezés is elképzelhető. Vegyük az Egyenlítőn a két pont közötti felezőpontot és nézzük meg, hogy mi lesz a képe. Egyrészt a két a megfelelő szakasz felezőpontja, hiszen mindkét csúcstól fele akkora távolságra van ez a pont, mint a háromszög oldalhossza. Másrészt rajta kell lennie a harmadik csúcs köré rajzolt körön, aminek a sugara a háromszög oldalhossza. Ez viszont ellentmondás.



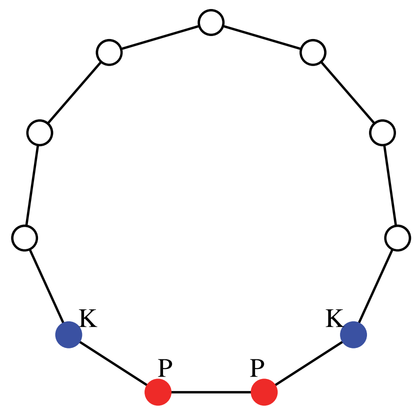
Második feladat

Tekintsünk két tetszőleges pontot és rajzoljuk meg a rájuk illeszkedő főkört. Ez az *Egyenlítő* két félgömbre osztja a gömböt. A maradék három pont közül a skatulyaelv miatt legalább kettő ugyanarra a félgömbre esik és akkor ezen a zárt félgömbön már 4 pont van.

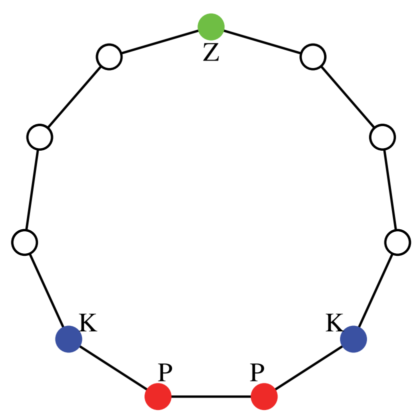
Harmadik feladat

Folytatva a megkezdett gondolatmenetet a pirosaktól jobbra lévő csúcsnak is késznek kell lennie.

Negyedik feladat



Most próbáljuk meg az alábbi ábrán zölddel jelölt pontot „jól” kiszínezni:



Ezt sajnos nem tudjuk megtenni, hiszen ha piros, akkor meglévő két piros ponttal, ha kék, akkor a meglévő két kék ponttal fog egyenlő szárú háromszöget alkotni.

A feladatot érdemes általánosítani, bár ez ezen a foglalkozáson ezzel nem foglalkoztunk. Az előző gondolatmenet nyilvánvalóan működik minden 3-nál nagyobb páratlan számra. 3-ra nyilván meg lehet adni olyan színezést, amiben nincs egyszínű egyenlő szárú háromszög.

Izgalmasabb a kérdés páros n-kre. Ott is létezik egy egyszerű megoldás, ami minden 8-nál nagyobb páros számra hasonló módszerrel belátja, hogy nem lehetséges a színezés. 6-ra és 8-ra pedig lehet ellenpéldát találni.

Negyedik feladat

A feladat a) része könnyen megoldható:

5, 10, 15
10, 20
5, 5, 20
5, 5, 10, 10
5, 5, 5, 5, 5, 5.

A feladat b) része lényegesen nehezebb.
Vegyük észre, hogy ha van páratlan közös osztója a kupacok elemszámának, akkor ez a tulajdonság megmarad. Hiszen amikor két kupacot összeolvasztunk, akkor is megmarad (ekkor nem is kell, hogy az osztó páratlan legyen), és akkor is megmarad, amikor egy páros elemszámút elfelezünk (itt viszont kihasználjuk, hogy az osztó páratlan). Az első lépés után 3 lehetséges helyzet állhat elő:

- A kupacok elemszáma: $5, 100$, ekkor 5 a közös osztó.
- A kupacok elemszáma: $51, 54$, ekkor 3 a közös osztó.
- A kupacok elemszáma: $49, 56$, ekkor 7 a közös osztó.

Innentől kezdve akárhogy is kezdtük, minden kupacban elemszáma osztható lesz egy 1-nél nagyobb páratlan számmal, így egyetlen kupacban sem lehet a későbbiekben 1 kavics.

Lénárt István

Hass, alkoss, gyarapíts…

(Előadás és műhelyfoglalkozás az összehasonlító geometria bemutatására)
Szendrei Julianna emlékének

Összefoglalás

Egy bemutató óra elemzése, amely a síkgeometria és a gömbi geometria közötti összehasonlítás módszerét alkalmazza a geometriai fogalmak mélyebb és alaposabb megismerésére, átélésére.

Alaphelyzet

Megtisztelő felkérést kaptam geometriai tárgyú bemutató előadásra tizenhét-tizennyolc éves fiatalok számára.
A tanteremben tizenkét ifjú hölgy és nyolc fiatalember foglal helyet. (Ezúton is elnézésüket kérem, hogy a továbbiakban „lány” és „fiú” néven említem őket.) Belépésemkor a vidám zsivaj elcsendesedik, az uzsonnafalatok és mobiltelefonok lassanként eltűnnek. A lányok közül többen füzetet, íróeszközt vesznek elő, és várakozóan néznek rám. Három fiú egy csoportban ül középen, szemmel láthatóan a „kemény magot” képviselik. Amennyire meg tudom ítélni, arra készülnek, hogy a várható, unalmas előadás alatt gondoskodjanak saját maguk és társaik, mindenekelőtt a lányok szórakoztatásáról.
Egyazon teremben vagyunk, néhány lépésnyire állok a fiataloktól, de úgy érzem, mintha láthatatlan jégfal emelkedne köztünk, amelyet át kell törnöm, hogy kommunikálni tudjunk egymással.

Első mondatok

Bemutatkozom, és beszélni kezdek az óra témájáról. Alig nyitom ki a számat, az egyik lány megkérdezi: „Ezt már írni kell?” Válaszom: „Hisz még nem mondtam semmit!”. Aztán hozzáteszem: „Ha valamit nagyon fontosnak érzek, felírom a táblára. Önök döntik el, hogy érdemes-e leírni vagy sem.”
Az óra témája a síkgeometria és a gömbi geometria együttes tanulmányozása, a megfelelő fogalmak összehasonlítása a mélyebb megértés és a drámaszituáció létrehozása érdekében. Saját utamról beszélek, amelyik ehhez az ötlethez vezetett. Beszédstílusomban igyekszem oldott lenni. Kerülök bármilyen durvaságot, pontos fogalmazásra törekszem, de bele-beleszövök informális szavakat vagy kifejezéseket is, mint „klassz” vagy „vagány”. Régmúlt matematikusokat emlegetve kérdéseket teszek fel: „Mikor élt ez az ember? Kik voltak kortársai, művészek, politikusok, bárki? Én még beszélhettem velük?” (Még Bolyainál is gyakran néznek rám bizonytalanul, mint határesetre…)
A hallgatóság reakciója várakozó csend; mintha arra várnának, hogy a báránybőrből mikor bújik elő a farkas, a baráti hangnemet, általános kérdéseket mikor váltják fel kemény matematika-feladatok. A többség próbál jó válaszokat adni, és felhangzik egy-két önkritikus nevetés is, amikor egy-egy tudós helyét keressük az időskálán. A „kemény mag” tagjait zavarja a lassan és nehezen, de oldódó légkör, és csacsiságok bekiabálásával próbálják a szerintük normális, ellenséges viszonyt helyreállítani. Első komoly sikerem: az egyik lány hátrafordul a három fiúhoz, és rájuk szól: „Nyughassatok már!” A fiúk sértődötten elhallgatnak.

Felkérem a hallgatóságot, mondjanak mesterséges és természetes példákat síkszerű és gömbszerű alakzatokra. Nehezen indul a dolog, de belelendülnek. Meglepi őket a gömb fölénye, gyakori előfordulása a természetben. Nagyon kevés síkbeli példa mellett (kristályok, levelek, pillangószárny, elefántfül (!) mellett rengeteg gömb: bolygók, gyümölcsök, vízcsepp, szappanbuborék, majd a jóval kényesebb biológiai gömbölydedségek kerülnek sorra. Magam csak célozgatok a kopasz fejre és szemgolyóra, de a tizenéves fiatalok vidáman csapnak le egyéb lehetőségekre is. A hangulat változni látszik, a tekintetek picit fényesednek.

Min kísérletezzünk?

Síkgeometriai kísérletekhez rendelkezésre áll a síklap és sokféle geometriai szerkesztőeszköz. Gömbi geometriai kísérletekhez rárajzolható gömb kellene. A hallgatóság szívesen veszi sorra és cáfolja meg a felmerülő ötleteket, pingponglabdától földgömbig, léggömbtől narancsig.

A tanácstalanság pillanatai után javaslom, hogy használjunk egy, erre a célra készült eszközt: a Lénárt-gömböt. Kiosztjuk a dobozokat, a három fiú közül az egyik segít a munkában, a másik kettő érezhető rosszallásától kísérve. Visszatér a vidám zsivaj, ahogyan a dobozokból a tetszetős gömbök és egyéb tartozékok előkerülnek. Nagyon jó, felszabadító érzés számukra, hogy megszűnik az egyazon személyre, egyazon hangra koncentrálás kényszere. Beszélhetnek, nevethetnek, egymásra figyelhetnek, mindezt összhangban az előadó szándékával, a foglalkozás témájával.

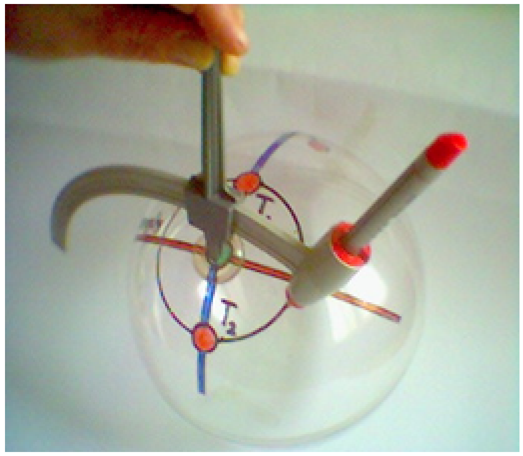
Amikor kiderül, hogy letörölhető tollal rajzolni lehet a gömbre, gyerekes mohóság, kíváncsiság lesz úrrá rajtuk. Szabadon akarnak kísérletezni, alkotni a gömbön, de erre semmi esélyük, hiszen az előadó nyilván bonyolult geometriai konstrukciók létrehozását várja el tőlük. A szó szoros értelmében nem hisznek a fülüknek, amikor hallják, hogy a következő öt perc a teljesen szabad rajzolás, kísérletezés ideje, bármit lehet rajzolni a gömbre, óvodai jeltől hangjegyekig és esőfelhőig.

Elmélyült, gazdag, valódi felfedező munka kezdődik, teljes figyelemkoncentrációval, még a zaj is elcsöndesedik. Sokféle eredmény születik, de meglepően gyakoriak a közös motívumok: szív, virág, Nap, kocka, ház... Művészi gömbrajzok nyuszikról, királylányokról, a tv-ben látott, számomra többnyire ismeretlen mesefigurákról; geometrikus díszítőminták gondosan kiszínezve; földgömb-víziók kontinensekkel, városokkal. Hihetetlen, hogy „tudományos”, „matematikai” szándék nélkül milyen mély és fontos felfedezések születnek az ismeretlen gömbi geometriában. Nagyon sok, jóval később kifejthető fogalom ősképe, csírája már a legelső rajzokban megjelenik. (Hozzáteszem, hogy ugyanez az állítás érvényes hat-nyolc-tíz éves gyerekek ilyen jellegű alkotásaira is.)

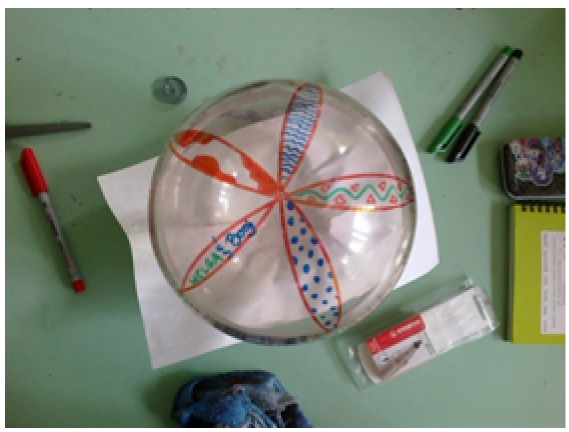
Nehéz rávenni őket a rajzolás befejezésére. Kérem, hogy mutassák be nyilvánosan a rajzaikat. A lányok sikítanak, a fiúk tiltakoznak, végül mindig akad két-három önként vállalkozó. (Kisebb korosztályoknál nehezebb a feladat: annyira leköti őket saját munkájuk, hogy nem szívesen figyelnek másra.) Ezen a ponton hirtelen felébrednek: jóllaktak a meglepetésekkel, a szabad rajzolással, és kíváncsian várják: hogyan lesz a játékból tudomány?

Gömbi körző

Bejelentem, hogy a „könnyű” szabadkézi rajzolás után megismerkedünk a készlet eszközei közül a legnehezebben kezelhetővel. Felmutatom anélkül, hogy megnevezném, és megkérem őket, próbálják ki saját kezűleg.



Az újabb sikerélmény két szempontból is fontos. Egyrészt, megerősíti önbizalmukat, hogy bánni tudnak az eszközökkel; másrészt ezt a tevékenységet már kétségkívül komolynak, geometrikusnak, ha úgy tetszik: tudományosnak ítélik. Ugyanúgy, mint a szabadkézi rajznál, itt is nehéz rávenni őket a szerkesztés befejezésére. Legtöbben koncentrikus köröket rajzolnak, de többen kipróbálják a síkról ismert rozetta (mandala) szerkesztést, és elgondolkoznak a különbség okán.



Körülbelül harminc perc után hangzik el az első olyan kérdés, amely egyértelműen kapcsolódik a jelenlegi geometria-tananyaghoz: Milyen vonalat rajzoltunk a gömbre ezzel az eszközzel? Körnek nevezhető-e ez a vonal? A kérdést döbbent csend fogadja, majd „Igen!”-ek és „Nem!”-ek hangzavara következik.

Kérdés a két táborhoz: Mivel indokolják véleményüket? Az „Igen”-pártiak tömör indoklása: „Azért kör, mert kerek!”, vagy esetleg: „Azért kör, mert nincs sarka!” A „Nem”-csapat álláspontja: „Azért nem kör, mert kör csak síkon létezhet, ennek meg kidomborodik a közepe!”

Ezen a ponton én, az előadó, elismerem, hogy nem tisztáztam egy fontos kérdést. Amikor összehasonlító geometriát emlegettem sík és gömb között, világossá kellett volna tennem, hogy az itt szereplő gömbi geometria csakis a gömb felületén játszódik. Sem behatolni a gömbbe, sem elrugaszkodni róla nem lehet. Ezek után ismétlem a kérdést: ebben a gömbi geometriában a gömbi körzővel rajzolt vonal gömbi kör-e vagy sem?

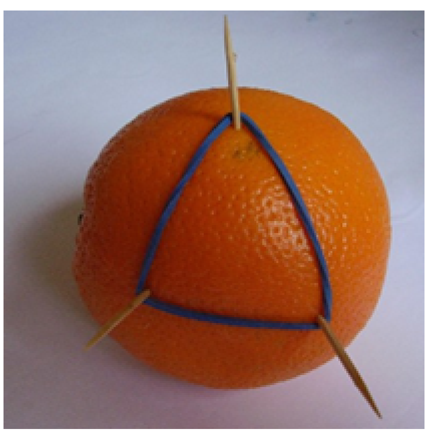
Erre a kérdésre már megérkeznek az első, bizonytalan, de lényegükben helyes válaszok: igen, a vonal kör, mert van olyan pont a gömbfelületen, amelytől a vonal minden pontja azonos gömbi távolságra esik. Mindenkit megkérek: mutassa meg a szóban forgó pontot, amely ezek szerint megérdemli a középpont nevet. Megmutatják, bár láthatóan nem értik, miért kell ilyen, magától értetődő kérdésre válaszolniuk.

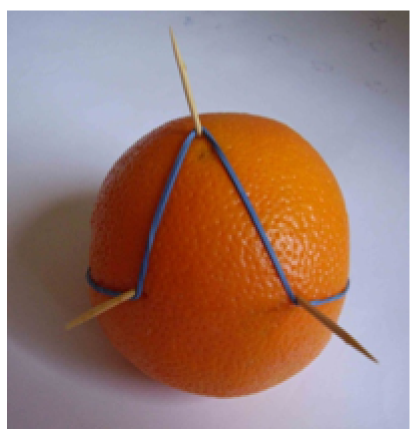
Most jön az igazi próbatétel a következő kérdés formájában: Ez az egyetlen középpont? Az azonnal rávágott „igen” választ zavart csend követi, majd – miután ujjammal és orrommal megmutatom az eredeti középponttal átellenes pontot is – felismerik, hogy a gömbi körnek két középpontja van. Az a határozott érzésem, hogy legtöbbjük számára ez az első alkalom a középpont fogalmának valódi megértésére, átélésére: nem feleslegesen bemagolandó versike, hanem valódi információt hordozó, értékes segítséget jelentő meghatározás.

Utalás két további programpontra

Egyenes vonalat rajzol-e a zsineg síkon és gömbön?

Háromszög-e a befőttes gumi és fogpiszkáló segítségével rajzolt alakzat?





Az első kérdés az egyenes vonal fogalmát és szerepét tisztázza, a második kérdés a sokszög értelmezését segíti. Az eszközök változtatása, a narancs szerepeltetése gömbmodellként sok más szempont mellett azért is hasznos, mert rámutat azokra a tapasztalatokra, amelyeket a hétköznapi életben szerezhetünk a nem-euklideszi geometriák tulajdonságairól.

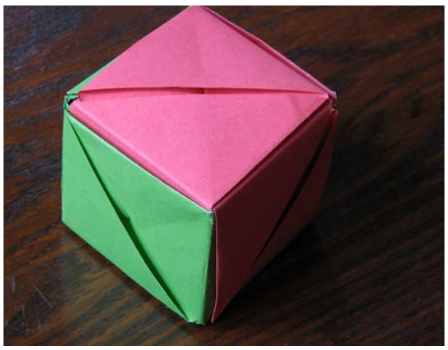
Zárszó

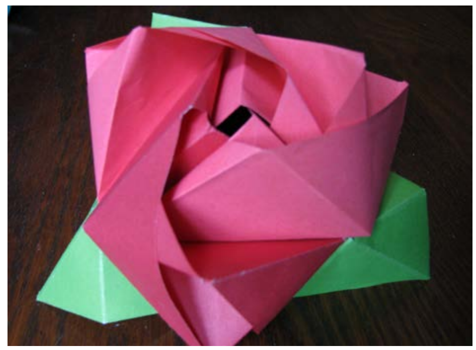
Az elmúlt évtizedekben sokféle korosztályban, sokféle érdeklődésű és képzettségű hallgatósággal volt módom kipróbálni a geometriai fogalmak felépítésének fent vázolt útját. Legutóbb Varsóban és Rzeszówban, Anna Rybak lengyel kolléganővel közösen vettünk részt tudománynépszerűsítő fesztiválokon. Nyolc órán keresztül szűnni nem akaró emberáradat, felnőttek és gyerekek, akik figyeltek az előadásra, és rajzoltak-körzőztek-vonalzóztak a gömbön. Tízéves forma kislány indulatosan felelt vissza szüleinek, amikor továbbhaladásra kérték: „Nem látjátok, hogy alkotok?"
A legcsekélyebb rosszindulat nélkül, kizárólag a javítás, előbbre jutás szándékával kérdezem: Kedves Iskola, kedves Kollégák! Hogyan lehetséges, hogy a sík-, gömbi, sőt a félgömbön ábrázolt hiperbolikus geometriát boldogan fogadó, a rajzolástól erőszakkal elvonszolt, saját felfedezéseitől megmámorosodott hat-nyolc-tízévesből néhány év alatt a geometria iránt jó esetben közömbös, rossz esetben ellenséges tizenéves válik? Miféle hideg, merev, gőgös és embertelen áltudomány torzképe kerül a színes rajzok, a művészetet és tudományt egyesítő, mobiltelefonon megörökített síkbeli és gömbi ábrák helyére? Kérlek, ne tekintsétek tudatlanság vagy hanyagság jelének, ha nem sorolom fel az internetet elárasztó munkák sokaságát, amelyek a felfedeztető tanítás-tanulás dicséretét zengik, Dewey-től Harvey-ig és Daniels-ig, Nahalkától Vekerdiig. Csak annyit kérdeznék: időhiányra, pénzhiányra, továbbtanulásra hivatkozásokon túl nem az lenne-e az igazi feladatunk, hogy megszerettessük a gyerekekkel-kamaszokkal az emberi tudás, alkotás, ezen belül a geometria csodáját és költészetét?

Pintér Klára*

Te is lehetsz bűvész!
Fedezzük fel bűvészmutatványok matematikai titkait!

Bűvészmutatványokat fogunk látni, melyek matematikai összefüggéseken alapulnak, és a valódi bűvészektől eltérően most meg is fejtjük ezeket az összefüggéseket, feltárjuk a trükkök titkait, így mindenki maga is be tudja mutatni azokat. A matematika ilyen csábító köntösbe való felöltöztetését szimbolizálja az a papírból hajtogatott kocka, amelyet néhány mozdulattal rózsává alakíthatunk [1].





1. Hummer-féle három tárgy kitaláló

A trükk: A bűvész kitesz három plüssállatot az asztalra az 1-gyel, 2-vel, 3-mal jelölt helyekre és hátat fordít. A közönség soraiból választott segítő felcserél két állatot, és hangosan kimondja azoknak a helyeknek a számát, amelyeken ezek az állatok álltak. Ezt folytatja, amíg akarja. Ezután gondol az egyik állatra, a másik kettőt megcseréli, de ezt a cserét nem mondja ki, ez a titkos csere. Majd tovább folytatja a cseréket, amíg akarja. Végül a bűvész megfordul, köröz a varázspálcájával és rámutat a gondolt állatra [2].
A titok: A bűvész az elején kiszemel egy állatot, megnézi melyik helyen van. Ezután ennek az állatnak a helyét követi az ujjain a bemondás alapján úgy, hogy a mutató ujj az 1-es, a középső a 2-es, a gyűrűsujj a 3-as pozíció. Ezt folytatja akkor is, amikor a titkos csere után tovább cserélgetnek. Amikor megfordul, megnézi, hogy az általa kiszemelt állat azon a helyen van-e, ahol az ujjai szerint lennie kellene. Ha ott van, akkor az azt jelenti, hogy nem vett részt a titkos cserében, vagyis ő a gondolt állat. Ha nincs ott, akkor részt vett a titkos cserében, mégpedig azzal az állattal cserélt helyet, amelyik végül azon a helyen áll, ahol a bűvész ujjai szerint az általa kiszemelt állatnak kellene állni. Így egyikük sem lehet a gondolt állat, csak a harmadik.

2. Pakolós kitaláló

A trükk: A bűvész kirak sorban hat tálcát, egy kosár kupakot, és elfordul. A közönség soraiból választott segítő kiszór az első tálcára valamennyi kupakot és megszámolja hány darab van. Ezután mindkét

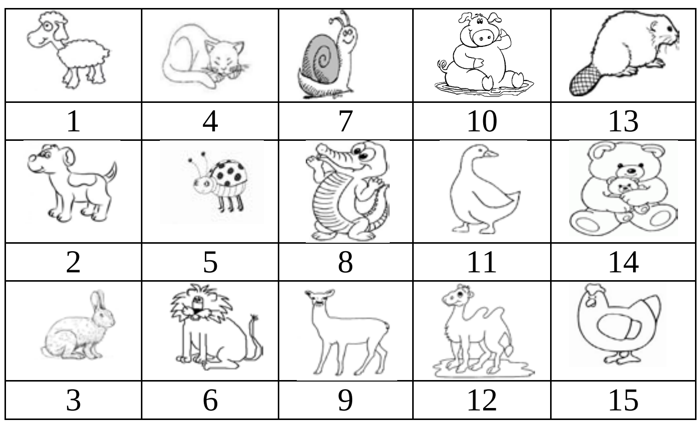
* SZTE JGYPK TÓKI Matematika Szakcsoport

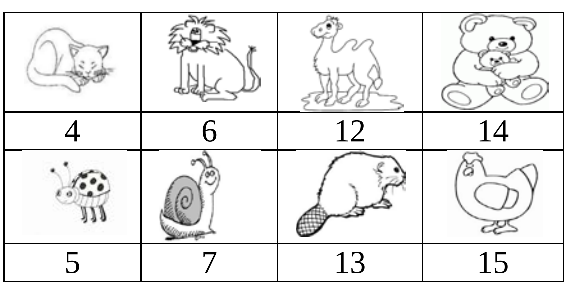
kezével megfog egy-egy kupakot, az egyiket átrakja a következő tálcára, a másikat visszadobja a kosárba. Ezt folytatja, amíg lehet, majd ugyanezt sorban a többi tálcával is végrehajtja. Végül mindegyik tálcán legfeljebb egy kupak lehet. Ekkor a bűvész megfordul, köröz a varázspálcájával, és megmondja, hogy hány kupak volt eredetileg az első tálcán.

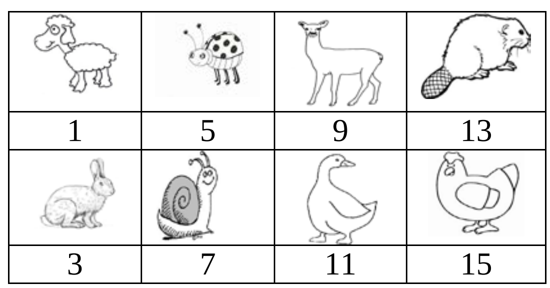
A titok: A segítő mindkét kezével egy-egy kupakot fog meg, így valójában kettesével csoportosítja a tálcán levő kupakokat, és annyi kupakot rak át a következő tálcára, ahány kettes csoport a tálcán volt. Így a csoportosítással, beváltással a kettes számrendszerbeli alakját kapjuk az eredetileg kirakott kupakok számának, az első tálca felel meg az 1-es, a második a 2-es, a harmadik a 4-es, a negyedik a 8-as helyi értéknek, és így tovább. Egy tálcán, azaz helyi értéken levő kupak az 1, a kupak hiánya a 0 számjegyet jelenti. A trükköt bemutathatjuk más számrendszerre is. A tízes számrendszeres változatnál 10 kupakot kellene egyszerre kivenni, 1-et továbbrakni és 9-t visszadobni a kosárba, ami elég sok számolást és nagy mennyiségű kupakot igényel, így esetleg feladatként lehet kitűzni a problémát.

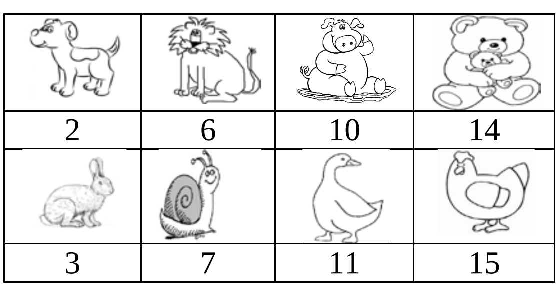
3. Kitaláló kártyák

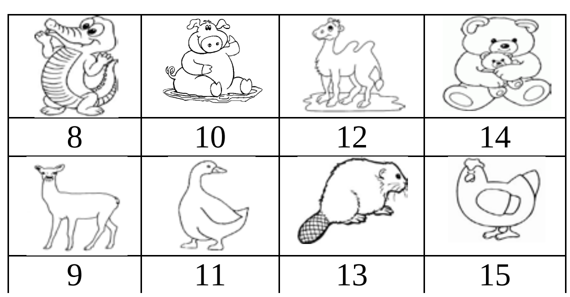
A trükk: Az első kártyán látsz 15 dolgot, ezek közül gondolj egyre! Ezután a többi kártya közül add oda a bűvésznek az összes olyan kártyát, amelyen ez a dolog rajta van. Ebből kitalálja, mire gondoltál.







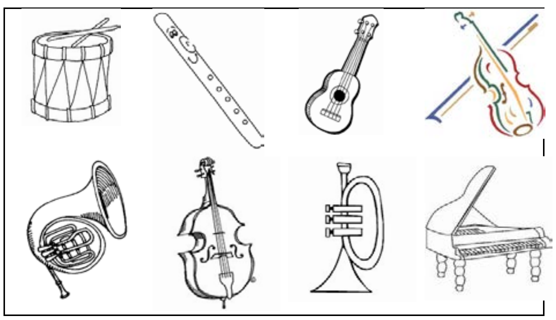


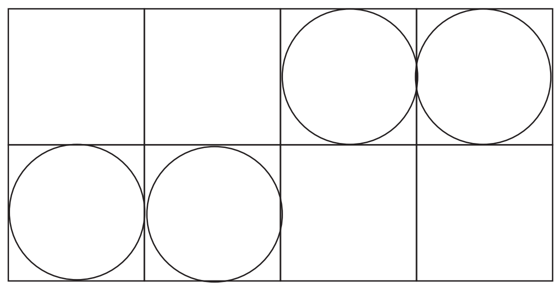


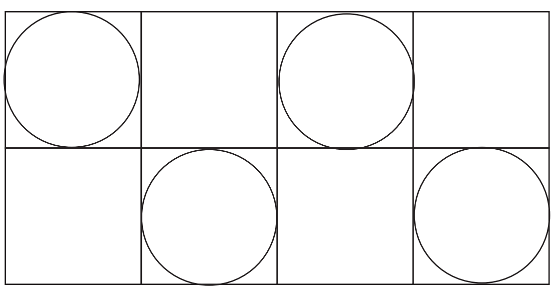
A titok: Ez a trükk is a kettes számrendszeren alapul. Minden kártya bal felső sarkában levő állat alatti számot kell figyelni. Ezek a kettes számrendszer helyi értékei, és a kártyán azok és csak azok a számok (állatok) vannak 1-15-ig, amelyek kettes számrendszerbeli alakjában ezen a helyi értéken 1-es számjegy áll. Így a kapott kártyák bal felső sarkában álló számok a gondolt állatnak megfelelő szám kettes számrendszerbeli alakjának azok a helyi értékei, amelyeken 1-es áll. Ha ezeket összeadjuk, éppen a gondolt állatnak megfelelő számot kapjuk.

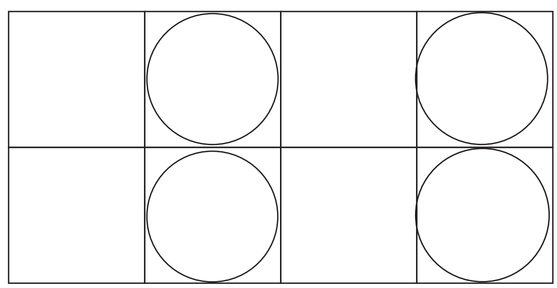
4. Varázskártyák

A trükk: Gondolj egy hangszerre a kártyán látható hangszerek közül! A bűvész sorban adja neked a kártyákat, és meg kell mondanod, hogy azon keresztül látod-e azt a hangszert, amire gondoltál. Ebből kitalálja, melyik hangszerre gondoltál!









A titok: Amelyik kártyán nem látod a választott hangszert, annak a tükörképén keresztül látod (a tükörtengely a hosszabbik oldal felező merőlegese), így azt a kártyát a bűvész fordítva veszi át, így csak egy hangszert lát, ha egymásra rakja az összes visszakapott kártyát. Számozzuk a hangszereket, és figyeljük meg, hogy az egyes kártyákkal mit tudunk eldönteni:

0	1	2	3
7	6	5	4

Az előző trükkhöz hasonlóan az első kártyával el tudjuk dönteni, hogy a gondolt szám kettes számrendszerbeli alakjában az egyes helyi értéken 1-es áll-e. A második kártyával pedig a kettes helyi értéken álló számjegyet tudjuk eldönteni. A harmadik kártyán nem a négyes helyi érték szerint vannak két csoportra bontva a számok, mert akkor a tükrözés nem működne, hanem úgy, hogy a kettes számrendszerben 1ab alakú szám ne legyen egy csoportban a 0ab alakú számmal, azaz egyikük a kártya egyik nézetében látsszon, a másik a tükörképében.

Érdemes gondolkodni azon, hogyan lehet nagyobb elemszámra hasonló kártyákat gyártani. [2]

5. Gondolatolvasás

A trükk: A bűvész megkever egy pakli kártyát és kirakja a hat felső lapot.

Ezek közül két önként jelentkező húz egyet-egyet, és megmondja az összegüket (J = 11; Q = 12; K = 13; A = 1).

Ezután belekeverik a húzott lapokat a pakliba, és a bűvész kiválasztja, mely lapokat húzták. [3]

A titok: A bűvész eredetileg a pakli tetejére odakészíti a pikk 1; kör 2; treff 3; káró 5; pikk 8; kör K lapokat, és úgy keveri a paklit, hogy az a 6 kártya ott maradjon a pakli tetején. A lapok száma érdekes, a mintájukat csak meg kell jegyezni, hogy ki tudja a bűvész a végén keresni a lapokat.

A kiválasztott számok összegéből a bűvész egyértelműen meg tudja mondani, melyik két lapot választották. A lapok számai Fibonacci számok, és két szám összegéből egyértelműen lehet következtetni a tagokra.

Általában igaz, hogy minden természetes szám egyértelműen előállítható nem szomszédos Fibonacci számok összegeként.

6. Hány érme van a jobb kezedben?

A trükk: A bűvész kiszórja a pénztárcájában levő aprópénzt az asztalra. A közönség soraiból választott segítőnek az a feladata, hogy vegyen a bal kezébe valamennyit az érmék közül, a maradékot a jobb kezébe, majd szorozza meg 4-gyel a bal kezében levő érmék számát, és 5-tel a jobb kezében levőkét, végül adja össze a két szorzatot. A bűvész az összegből kitalálja, hogy hány érme van a jobb kezében és hány a balban. [2]

A titok: A bűvész tudja, hogy hány érme volt eredetileg a pénztárcájában, így a $4b+5j = 4\cdot(b+j)+j$ összeget és $4\cdot(b+j)-t$ ismerve j, majd b is adódik.

7. Súgnak a kockák

A trükk: A közönség soraiból választott segítő feldob három szabályos dobókockát, és összeadja a dobott számokat. Ezután kiválasztja az egyik kockát, és ennek az alsó lapján levő számot is hozzáadja a korábbi összeghez. Ezzel a kockával még egyszer dob, és az újonnan dobott számot is hozzáadja az összeghez. A bűvész ekkor megfordul, kézbe veszi a kockákat, megrázogatja, és a kockák megsúgják neki a kapott összeget. [2]

A titok: A bűvész látja, hogy az utolsó dobás után milyen számok állnak a kockák felső lapján. Ezek összegén kívül a kapott összegben még a kiválasztott kockával történt első dobás utáni felső és alsó lapon álló számok összege szerepel. Mivel egy szabályos dobókocka szemközti lapjain levő számok összege 7, így a látott összeghez 7-et adva a bűvész megkapja a végső összeget.

8. Kártyák fejjel lefele-felfele

A trükk:

– Egy 52 lapos pakli kártyát tegyél fejjel lefele.

– Válassz egy számot 10 és 26 között, annyi kártyát vegyél ki, fordítsd fel őket, és így keverd bele a pakliba.

– Számolj le nekem annyi kártyát, ahányat megfordítottál.

– Add ide nekem, és egy kis varázslattal az én paklimban ugyanannyi lap lesz fejjel felfele, mint a tiedben.

A titok: A pakliban fejjel felfele fordítva k darab kártya lett. Ha ezután a pakliból leszámolnak k darab kártyát, akkor ezek közt ugyanannyi lesz fejjel lefele, mint a maradék pakliban fejjel felfele. Ugyanis a k darabos kupacban eredetileg minden lap fejjel felfele volt, és a lépések után néhány fejjel felfele álló lapot fejjel lefele állóra cseréltek, így a k darabos kupacból annyi fejjel felfele álló lap került a maradék pakliba, ahány fejjel lefele álló lap a k darabos kupacba. A trükk úgy működik, hogy a bűvész megfordítva veszi át a k darabos kupacot, így az eredetileg fejjel lefele álló kártyák fejjel felfele lesznek.

9. Színlátó ujjak

A trükk: Csukott szemmel ossz szét 24 piros és valamennyi kék korongot két csoportra úgy, hogy a két csoportban ugyanannyi piros korong legyen!

A titok: Az előző trükkhöz hasonlóan, ha tetszőleges 24 korongot kiválasztunk, abban ugyanannyi lesz kék, mint a megmaradt korongok között piros. Tehát ha úgy számolunk le 24 korongot, hogy közben mindegyiket megfordítjuk, akkor a leszámoltak között ugyanannyi piros lesz, mint a megmaradtak között.

10. Bob Hummer tíz kártyatrükkje

A trükk: Kapsz egy pakli kártyát. A pakli két felső kártyáját együtt fordítsd meg, és így tedd a pakli tetejére. Emeld meg a paklit, a felső részt tedd az alsó alá.

Ezt a két lépést csináld néhányszor.

Egyszer, amikor a pakli tetején levő lap fejjel felfele van, jegyezd meg, melyik lap az, majd fordítsd meg ezt az egy lapot.

Emeld meg a paklit, tedd alá, és add oda a bűvésznek, aki kirakja a kártyákat úgy, hogy csak a gondolt lap lesz fejjel felfele. [3]

A titok: Eredetileg a lapok felváltva fejjel felfele és lefele voltak a pakliban. A két lap megfordításával ez nem változott, és a pakli lapjait egy kör mentén képzelve láthatjuk, hogy az emeléssel sem változott, hogy minden második lap fejjel felfele, minden második lefele van.

A kiválasztott lap felfordítása megbontotta ezt a rendet.

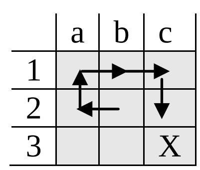
A bűvész a kapott pakli lapjait két kupacba rakja felváltva a bal- és jobboldalra, így a gondolt lap kivételével a baloldalon a fejjel lefele, a jobboldalon a fejjel felfele kártyák lesznek. A jobboldali kupacot a baloldalira borítva, és a lapokat szétterítve csak a gondolt lap lesz fejjel felfele.

11. Érmés trükk

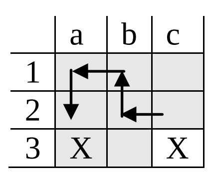
A trükk: Valamennyi érmét ledobunk az asztalra, véletlenszerűen lesz mindegyik fej vagy írás. Mindkét kezeddel fordíts egyet-egyet! Ezt ismételd, amíg akarod! Takarj le egy érmét, és a bűvész megmondja, hogy az fej vagy írás!
A titok: A bűvész megnézi, hogy induláskor a fejek száma páros-e. Amikor egyet-egyet fordítunk, akkor a következő esetek lehetnek:
Fej-fej helyett írás-írás.
Fej-írás helyett írás-fej.
Írás-írás helyett fej-fej.
Mindegyik esetben a fejek száma páros számmal változott, így a lépések során a fejek számának paritása nem változott, tehát tudjuk, hogy a végén páros vagy páratlan számú fej lett, ez alapján a letakart érme kitalálható.

12. David Copperfield kártyatrükkje

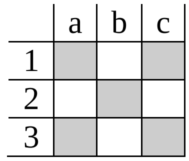
A trükk: A közönség tagjai kiraknak 9 kártyát 3x3-as négyzet alakban. Ezeken a kártyákon kell lépkedni. A középső kártyáról indulva lépnek szomszédos kártyára lefele, felfele, balra vagy jobbra tetszőleges irányba haladva annyit, amennyit a bűvész mond. Egy ilyen lépéssor után a bűvész megmondja, hogy melyik kártyát vegyék el. Átlósan lépni vagy üres helyet átugrani nem szabad, de visszafele lehet lépni. A bűvész megint megmondja, hogy hányat lépjenek, és a lépéssor után melyik kártyát vegyék el, és így tovább:
Tedd az ujjad a középső kártyára!
Lépj 5-öt és vedd el a c3 kártyát!



Az ábra egy lehetséges útvonalat mutat. A következő lépéssor onnan indul, ahova az előzőben érkeztek.
Lépj 4-et, és vedd el az a3 kártyát!



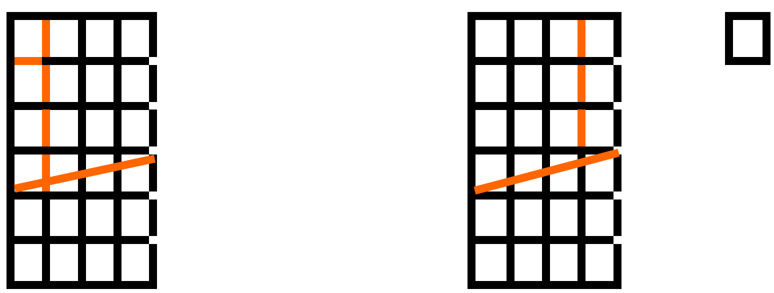
Hasonlóképpen kell lelépni a következő lépéssorokat:
Lépj 3-at, és vedd el az c2 kártyát!
Lépj 4-et, és vedd el a b3 kártyát!
Lépj 5-öt, és vedd el a c1 kártyát!
Lépj 4-et, és vedd el az a1 kártyát!
Lépj 3-at, és vedd el az a2 kártyát!
A csoda az, hogy bármerre is lépkedtek a közönség tagjai, senki sem áll azon a kártyán, amelyet a bűvész elvesz. Így végül a „gondolatátvitel” eredményeként mindenki ugyanazon a kártyán fog állni.



A titok: Képzeljük el, hogy sakktáblaszerűen két színnel színezzük a kártyákat, így láthatjuk, hogy páros számú lépéssel mindig ugyanolyan színű kártyára lépünk, mint ahonnan indultunk, páratlan számú lépéssel pedig ellentétes színűre. Ez alapján a bűvész tudja, hogy ha a középső kártyáról indul a közönség, akkor az egyes lépések után milyen színű kártyán fognak állni, és ellentétes színű kártyát vesz el. Végül kénytelen mindenki a középső kártyára lépni. A trükk segít felfedezni a színezés és a paritás alkalmazásának stratégiáját, ugyanis a gyerekek rájönnek, hogy a kártyák kétfélék lehetnek, és mindenki ugyanarra a fajtára lép, a bűvész pedig a másik fajtából bármelyiket elveheti. Ezek a probléma-megoldási stratégiák sok feladat megoldásánál hasznosak.
A trükk még hatásosabb, ha a közönség monitoron tudja követni az ujjával a lépéseit, és a „gondolat-átvitel” következtében mindenki ugyanarra a kártyára fog mutatni.

13. Végtelen csokoládé

A trükk:
Vágjunk szét egy tábla csokoládét a baloldali ábrának megfelelően, majd rakjuk össze a darabokat a jobb oldali ábrának megfelelően. Újra megvan a tábla csokoládénk, csak kimaradt egy kocka! [3]



A titok: Az újonnan összerakott tábla kicsit rövidebb az eredetinél, de ugyanolyan széles, és a darabok is pontosan illeszkednek egymáshoz. A nagy trapéz alakú darab hosszabbik alapja a baloldali ábrán láthatóan 4 egységnél kicsit kisebb, a jobboldali ábrán 4 egységnek látszik. A valóságos csokoládénál a kockák közötti mélyedések szélessége el tudja titkolni ezt a különbséget. Amikor folytatjuk a csokoládé kockák kiváltását, és másodszor csináljuk meg ugyanezt a trükköt, akkor már jobban látszik a méretbeli eltérés.

14. Kruskal-féle kártya leszámoló

A trükk: Összekeverünk egy pakli francia kártyát, és egyesével lerakjuk fejjel fölfele. Ezeken kell lépegetni úgy, hogy először lépsz valamennyit (1-10). Utána mindig annyit, amennyit az a kártya ér, amelyre az előző lépéssorral jutottál. A számos kártyák annyit érnek, amennyi rájuk van írva, az A 1-et ér, a J, Q, K pedig mind 5-öt. A bűvész az egyik lapra tesz egy érmét, és fogad veled, hogy végül oda fogsz jutni, ha nem oda jutsz, akkor megnyered az érmét.
A titok: A bűvész úgy rakja le a kártyákat, hogy ő is választ egy számot, például az 1-et, és ugyanúgy számolja a lépéseket, ahogy a közönség. Amikor már nem tud tovább lépni, arra a kártyára teszi az

érmét. Meg fogjuk mutatni, hogy így körülbelül $0{,}83$ eséllyel eltalálja a végső kártyát. A magyarázat heurisztikus, de mutatja a trükk lényegét.
Az első szám választásánál a közönség által választható számok átlaga $5{,}5$; mivel 10 szám közül választhattak, a bűvész pedig egy szerint indult, a tévedés esélye: $0{,}1$.
A lépések során a lépéssorok hosszának átlaga: $(1 + 2 + \ldots + 10 + 5 + 5 + 5)/13 = 5{,}38$, így a lépéssorok száma körülbelül $(52 - 5{,}5)/5{,}38 = 8{,}64$.
A tévedés esélye egy lépéssornál: 1 – 1/5,38 = 0,814
Összesen 9 lépéssel számolva így a tévedés valószínűsége: $0{,}9 \cdot (0{,}814)^8 = 0{,}174$
Tehát $1 - 0{,}174 = 0{,}826$ eséllyel a bűvész eltalálja az utolsó kártyát!
A 83%-os esély növelhető, ha két paklit rakunk ki, csak akkor tovább tart.
Dobókockákat sorba rakva is hasonlóan működik a trükk már 25 dobókockával is.
Játszhatjuk különböző szövegekkel a szavakon annyit lépve, ahány betűből áll az a szó, amire éppen ráléptünk. Érdekesség, hogy a Függetlenségi Nyilatkozaton így lépdelve a happiness, „boldogság” szóhoz jutunk.

Irodalom

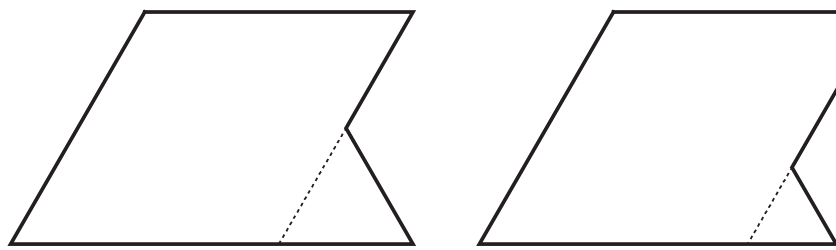
[1] Valerie Vann: Origami magic rose cube, `www.youtube.com/watch?v=A8EyLFWXV_0`
[2] Gardner, M.: Mathematics Magic and Mystery, Dover Publications, Inc., New York, 1956
[3] `www.mathaware.org` (Activity Calendar: April 2014)

Gál Péter

Könnyű, mint egy kétdarabos puzzle

Nemrégiben hallottam valakitől a címben szereplő viccesnek szánt mondást. Azt szerette volna kifejezni vele, hogy a kapott feladat nagyon egyszerűen megoldható, szinte semmi ügyesség vagy gondolkodás nem szükséges hozzá. A véletlen műve, hogy pont aznap ismertem meg Vesa Timonen játékát, a *Symmetrick*-et, ami éppen két darabból áll. És bizony, nekem több mint egy óráig tartott a megfejtése, tehát egyáltalán nem gondoltam könnyűnek.

Pedig a darabjai nagyon egyszerűek, mindkettő egy 60-120 fokos rombusz és egy szabályos háromszög összeerősítésével keletkezik (1. ábra).



1. ábra. Symmetrick

A két rombusz egybevágó, míg az egyik elemben a szabályos háromszög oldala a rombusz oldalának a fele, a másikban pedig a harmada.

A játék nagyon egyszerűen elkészíthető fából is, de keményebb papírból kivágva is remekül kipróbálható.

A feladat mindössze annyi, hogy helyezzük egymás mellé ezt a két elemet úgy, hogy egy tengelyesen szimmetrikus síkidomot kapjunk.

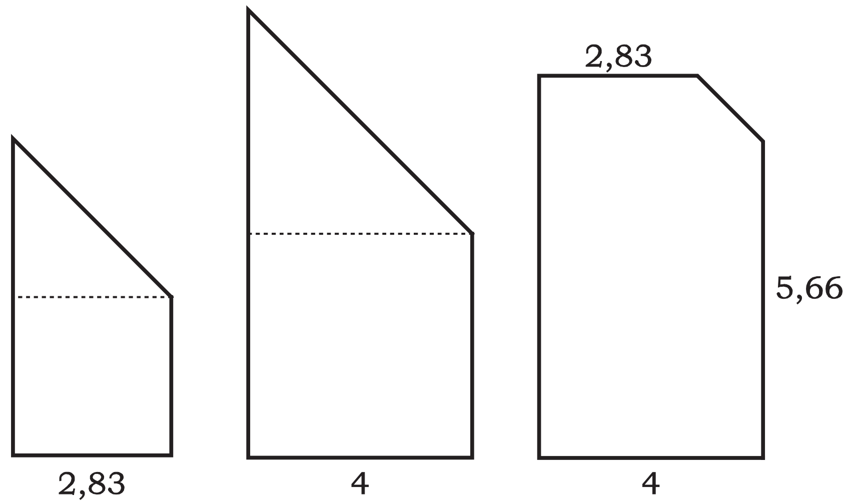
De mi köze a Symmetricknek a puzzle-höz? Nagyon is sok! Angolul mindenféle fejtörőt puzzlenek neveznek, a keresztrejtvénytől kezdve, a trükkös logikai feladványokon át egészen a magyarul is puzzle-nak nevezett játékig. Valószínűleg aki a címben szereplő mondást idézte, az a mi puzzlenkre gondolt, ami tényleg nem túl nehéz, ha csak két darabos. Nekem rögtön a kevés darabból álló ördöglakatok és más fából elkészíthető fejtörők ugrottak be. Azóta (is) szisztematikusan gyűjtöm a 2-3 vagy maximum 6 darabból álló, komoly kihívást igénylő játékokat.

Szimmetrikus alakzatot kereső játékok már a Symmetrick előtt is léteztek. Pár évvel korábban nyert tervezői díjat a Hiroshi Yamamoto által kitalált *Ex 3*, amiben ugyanez a feladat, csak – ahogy a neve is sugallja – most 3 elem segítségével kell szimmetrikus alakzatot kirakni. Ez a „puzzle” is elég egyszerű geometriai formákból áll (2. ábra).

Minden elem minden szöge 45 fok többszöröse. A két trapéz egy-egy négyzetből és egyenlő szárú, derékszögű háromszögből áll. A kisebb háromszög átfogója megegyezik a nagyobb befogójával. A jobb szélen látható ötszög jobb oldala megegyezik a nagyobb háromszög átfogójával, a felső oldala pedig a kisebb négyzet oldalával. Leírni szinte bonyolultabb, mint megszerkeszteni!

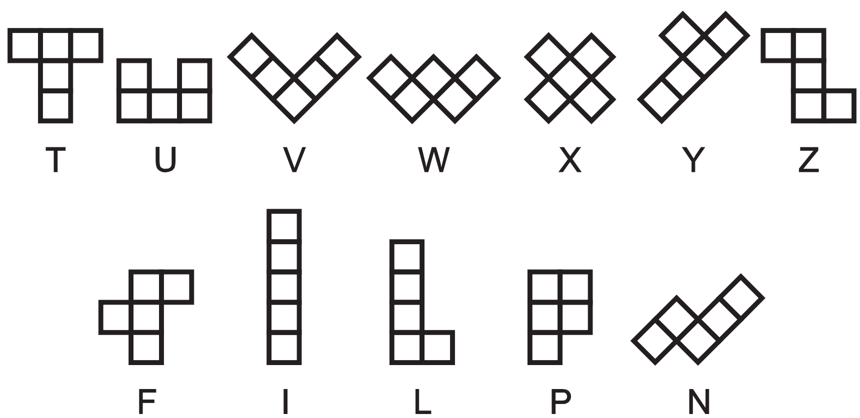
Az Ex 3 meglepően nehéz játék. Nagyon sokan nem tudják megoldani, szinte teljesen függetlenül attól, hogy milyen matematikai képzettségük van. Ha általános iskolai matematika órán előkerül ez a játék, nyugodtan lehet akár egy ötössel is jutalmazni a megoldókat.

Mindkét eddig bemutatott játék Magyarországon szinte beszerezhetetlen. Ezért is kezdtem vizsgálni, hogy könnyebben hozzáférhető elemekből lehet-e hasonlóan érdekes feladványokat készíteni. Talán



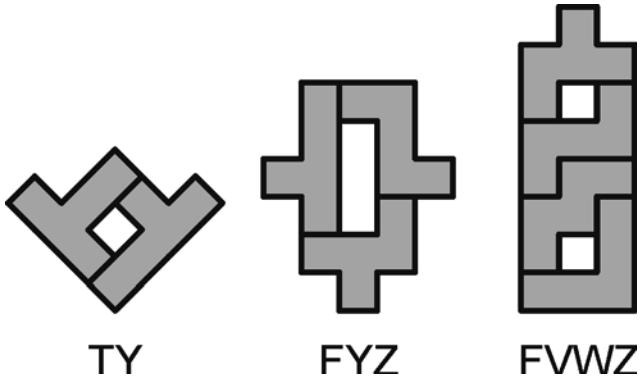
2. ábra. Ex 3

minden iskolában van *pentominó* készlet, de ha nincs is, akkor is kapható, illetve egyszerűen előállítható.
A pentominók 5 négyzet teljes oldallal történő összeerősítésével keletkeznek. 12-féle létezik (3. ábra).



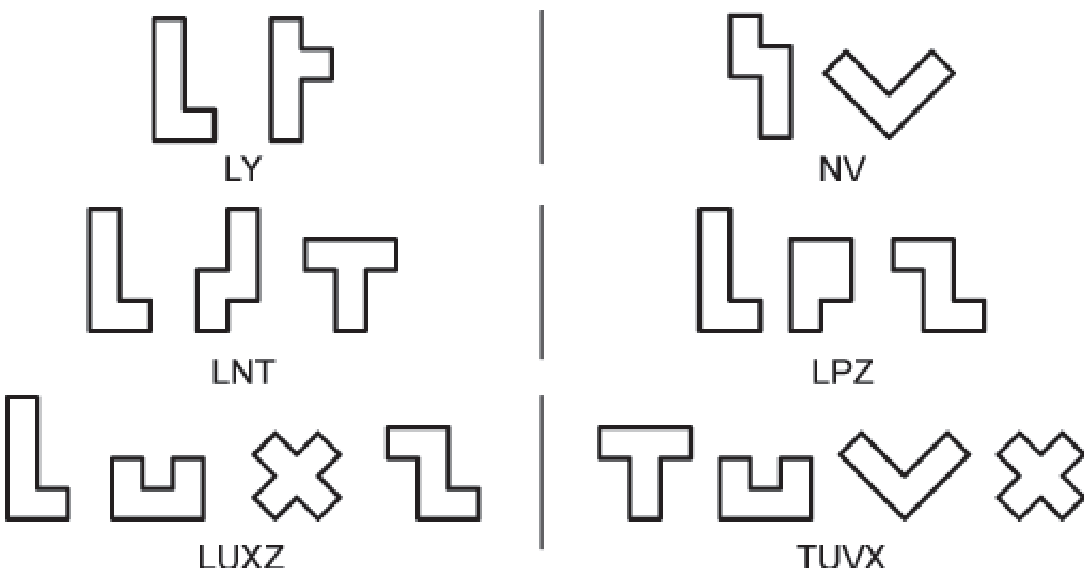
3. ábra. Pentominók

Rengeteg szebbnél szebb alakzat kirakható a segítségükkel. Pl. téglalapok, épületek, állatok, járművek…
Az én vizsgálatomnak viszont az volt a célja, hogy megállapítsam, milyen szimmetrikus alakzatok hozhatók létre 2, 3 vagy 4 elem segítségével. Ha léteznek olyan készletek, amiknek csak egy-két megoldásuk van, akkor azok jók lehetnek a fentiekhez hasonló fejtörőknek. Szerencsére elég sok ilyet sikerült találni, így jónéhány fejtörővel lehetünk gazdagabbak egyetlen pentominó készlet birtokában.
A következő ábrán egy-egy szimmetrikus alakzatot láthatunk, melyek 2, 3, ill. 4 elem felhasználásával készültek (4. ábra).
A fenti ábrán olyan elemkészletek szerepelnek, amiknek nemcsak egy megoldásuk van, hanem kettő. Próbálja meg az olvasó megtalálni a második megoldásokat! Noha ez a feladvány itt szerepel először, így nem tudom pontosan megítélni a nehézségét, de azt gondolom, hogy az FYZ elemhármasból kirakni egy másik szimmetrikus alakzatot komoly fejtörést igényel, míg az FVWZ elemnégyes másik megoldásának megtalálása biztosan órákat vesz igénybe, és csak az igazán kitartóaknak fog sikerülni.



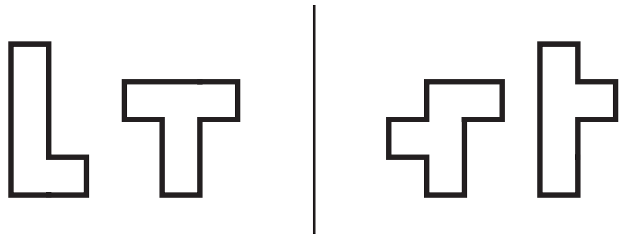
4. ábra. Szimmetrikus pentominó alakzatok

Következzen még néhány hasonló feladvány!
Rakjunk ki szimmetrikus alakzatokat a következő párokból, hármasokból és négyesekből (5. ábra).



5. ábra. Feladványok szimmetrikus pentominó alakzatokra

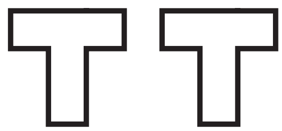
Minden, itt szereplő feladványnak legalább két megoldása van.
A szimmetrikus alakzatok keresésén kívül más nehéz problémákat is ismerünk kevés pentominó elem felhasználásával. Ha két elemet sikerül tengelyesen szimmetrikus alakzatba rendezni, akkor a tengely mentén elvághatjuk a kapott alakzatot két egybevágó részre. Adódik a kérdés, hogy vajon csak a szimmetrikus alakzatokat lehet két egybevágó részre vágni? Nyilván nem, erre elég könnyű ellenpéldát találni. És mi van akkor, ha nem kötjük ki, hogy egyetlen egyenes vonallal kell vágni? Ekkor eljutunk egy újabb játékos feladványhoz!
Rakjuk egymás mellé a következő ábrán látható 2-2 pentominót úgy, hogy egy törtvonallal két egybevágó részre lehessen bontani! (A pentominóknak nem elég csúcsban érintkezni, az őket alkotó négyzeteknek teljes oldalukkal kell egymás mellé kerülniük!)
Ennek a feladatnak a megfordítottjaként egy másik két darabos játékot kapunk. Vegyünk az egyik pentominóból két darabot, pl. két T remek lesz. Illesszük ezeket egymáshoz úgy, hogy két másik pentominóval is kirakható alakzatot kapjunk! Mivel csak egyféle elemet használunk, kis jóindulattal



LT FY

6. ábra. 2 egybevágó alakzatra darabolható párok

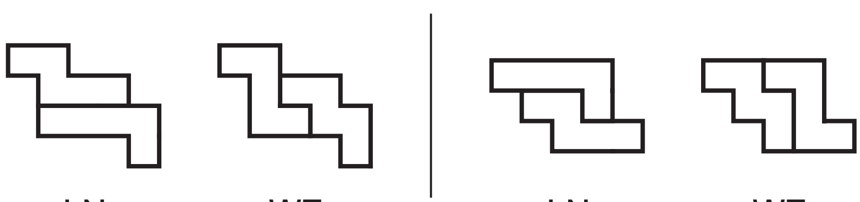
mondhatnánk, hogy megalkottuk az egy darabos puzzle-t. Ennél kevesebb elemből már tényleg nehéz lenne játékot készíteni.



TT

7. ábra. „Egy” darabos puzzle

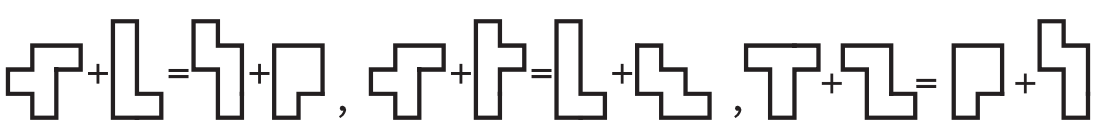
Ez utóbbi feladatot más szavakkal úgy is mondhatnánk, hogy egybevágó alakzatokat kell kirakni a két T-ből és két másik pentominóból. Ez az átfogalmazás rögtön egy másik játék ötletét adja.
Rakjunk ki azonos alakzatokat különböző pentominó csoportokból! A következő ábrán az LN és a WZ elemek felhasználásával látható két megoldás.



LN WZ LN WZ

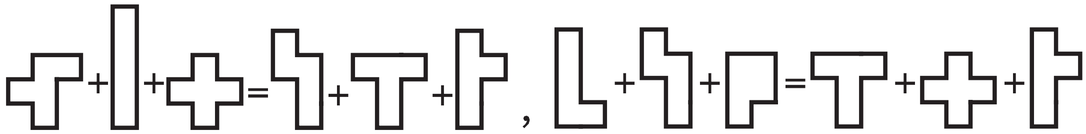
8. ábra. Azonos alakzatok az LN és a WZ pentominókból

Ugyanezen elempárokkal létezik egy harmadik megoldás is. Keressük meg!
Most is igaz, hogy akkor nehéz igazán a játék, ha csak kevés megoldása létezik. 2-2 pentominó felhasználásával a 3 megoldás soknak számít, így az LN-WZ elemek viszonylag könnyű feladványt eredményeznek. Lássunk néhány egy megoldásos párosítást (9. ábra).



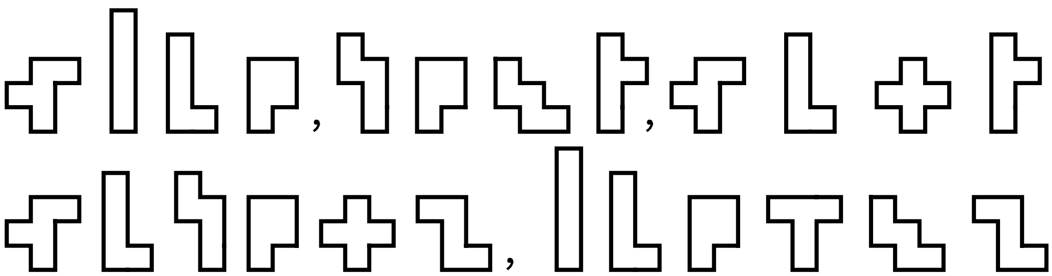
9. ábra. Pentominó egyenletek két-két elemmel

Jóval nehezebb feladványokat kapunk 3-3 elem felhasználásával! Ezek már igen komoly fejtörők (akkor is, ha az elsőnek 2 megoldása van) (10. ábra).



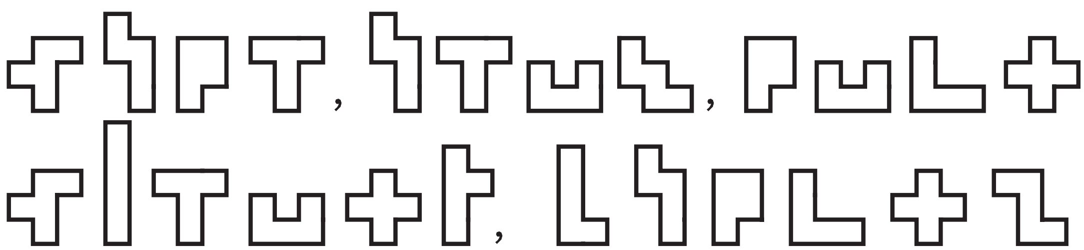
10. ábra. Pentominó egyenletek három-három elemmel

Talán még érdekesebb ugyanez a feladattípus, ha nem határozzuk meg az elempárokat, csak 4 vagy 6 „ömlesztett” elemből kell azonos alakzatokat létrehozni. A következő elemkészleteket akárhogy bontjuk két részre, mindig kirakható belőlük két azonos alakzat. Így ezek a készletek 4 elem esetén 3 játékot eredményeznek, míg 6 elem esetén 10-et (11. ábra).



11. ábra. Bárhogy kettébontható pentominó készletetek

A következőket viszont épp fordítva, csak egyetlen módon lehet kettéosztani, hogy legyen megoldásuk (12. ábra).



12. ábra. Csak egy módon kettébontható pentominó készletek

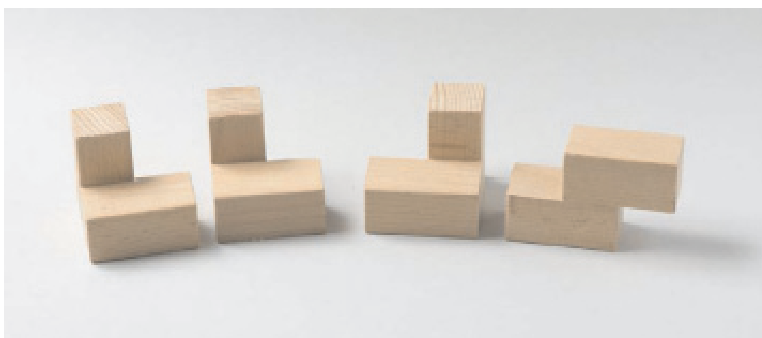
A hasonló típusú játékok vizsgálata pentominók (és más, kevés négyzetből összeálló poliominók: triominók, tetrominók, hexominók) esetén lezárult, tudjuk az összes megoldást, szinte korlátlanul állnak rendelkezésre hasonló feladványok. Egész más a helyzet pl. a szabályos háromszögekből felépülő poliamondok vagy a hatszögekből álló polihexek esetén. Ezen alakzatok még számos problémát, nyitott kérdést rejtenek.

Elindultak a vizsgálatok a térbeli alakzatok körében is. Bram Cohen és Wei-Hwa Huang alkották meg a nemrégiben bemutatott *Convergent Evolution: D'Artagnan* nevű játékot. Ennek minden eleme 4-4 kockából épül fel, de hasonló a feladat, mint a síkbeli változatnál: rakjunk ki két azonos alakzatot az elemekből!

Az elemek színének nincs jelentősége. Látható, hogy a négy elem közül 3 egyforma. Sokan meglepődnek, amikor először szembesülnek ezzel a feladvánnyal, első pillantásra lehetetlennek gondolják. Pedig nem olyan nehéz, több-kevesebb próbálkozással szinte bárkinek sikerül.

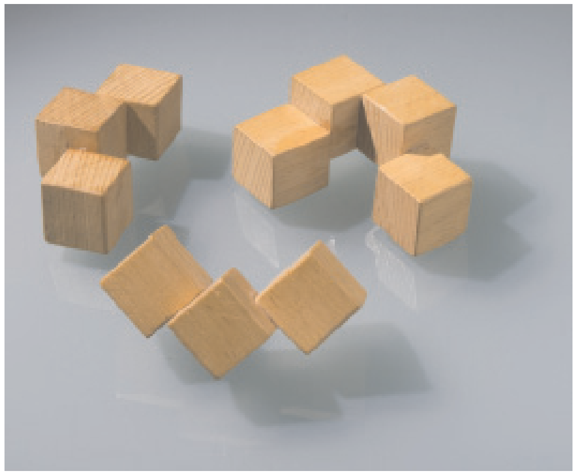
13. ábra. Convergent Evolution: D'Artagnan

Érdekes viszont, hogy nemcsak két azonos alakzatot lehet kirakni, hanem két olyat is, amik egymás síkra vonatkozó tükörképei. Ezek matematikai értelemben egybevágók, mégsem ezt a megoldást keressük, hanem a ténylegesen azonosakat!
Amikor elkészítettem ezt a játékot, az egyik elemnél hibáztam és fordítva ragasztottam össze. El is neveztem az így kapott elemkészletet *Mutáns*-nak (14. ábra).

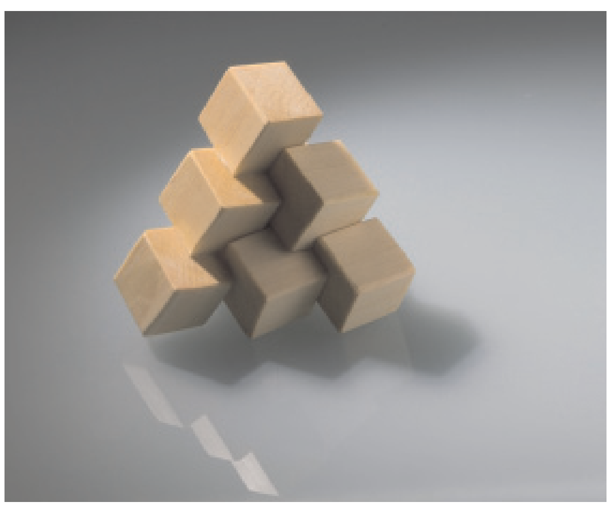


14. ábra. Mutáns

Később kiderült, hogy ez a négy elem is alkalmas két azonos alakzat kirakására. Sőt, kétféleképpen is ketté lehet bontani az elemeket, hogy jó megoldást kapjunk. Így bizonyos szempontból a Mutáns túllépett az eredeti változaton, talán jobb játék lett.
Nincs szoros logikai kapcsolat az eddig bemutatott játékok és az egyik kedvencem, a *Kockapiramis* között. Stewart Coffin játéka is csak három részes, mégis komoly térlátást, ügyességet kíván a kirakása. Az elemei a 15. ábrán láthatók.
Talán azért is nehéz a megoldása, mert szokatlan formát kell az elemekből összeállítani. Nem gyakran találkozunk élükre-csúcsukra fordított kockákból álló „piramissal". Az összerakott játék a 16. ábrán látható.
Ebben a leírásban igyekeztem olyan játékokat összegyűjteni, amik különösebben nagy kézügyesség vagy gépesítés nélkül elkészíthetők, mégis szépek, érdekesek. Arra biztatom az olvasót, hogy minél többet próbáljon ki ezek közül. Ha némelyiket nem sikerül megoldani elsőre (vagy esetleg másodikra sem), akkor se szegje senkinek a kedvét, hisz ezek egyáltalán nem könnyű fejtörők.
Játékra fel! (A megoldásokat – szükség esetén – a `www.vtamk.hu` honlapról töltheti le az olvasó.)



15. ábra. A Kockapiramis elemei



16. ábra. Kockapiramis

Radnóti Katalin – Nagy Mária*

Nemlineáris jelenségek

Az előadás során a mérési adatok kezeléséről volt szó konkrét példák bemutatásával. A mérési adatok kezelésének fő részei a következőkben foglalhatók össze, amelyekre példákat láthattak az előadáson részt vevők:

– az adatok ábrázolása,

– különböző függvények illesztése az adatokra.

– Kérdésként fogalmazódik meg, hogy mennyire pontos, jó az illesztés?

– Adatformálást kell nem egy esetben végrehajtani, például négyzetre kell emelni, különböző műveleteket kell végezni, mint például összeadni, osztani, szorozni az adatokat.

– A folyamat szempontjából jellemző mennyiségek meghatározása a ténylegesen mért adatokból, melyekhez matematikai műveleteket alkalmazunk.

– Előfordul sok esetben, hogy a fenti műveletek alapján új jelenségre, mérhető mennyiségre következtethetünk.

A matematikai ismereteket a fenti esetekben eszközként használjuk, melyekhez az IKT eszközöket hívhatjuk segítségül. Például különböző adatbázis kezelő programokat alkalmazunk. Az előadás során az Excel programot használtuk.

Rugóra akasztott test rezgése

A tanulók azt a feladatot kapták, hogy gondolkozzanak el azon, miként függhet a rugóra akasztott test tömegétől a rugóból és a testből álló rendszer rezgésének a rezgésideje?

– Alkossanak erről hipotézist!

– Gondolkodjanak el azon, hogyan is mérnék meg a rezgésidőket?

– Mit kezdenének a mérési adatokkal?

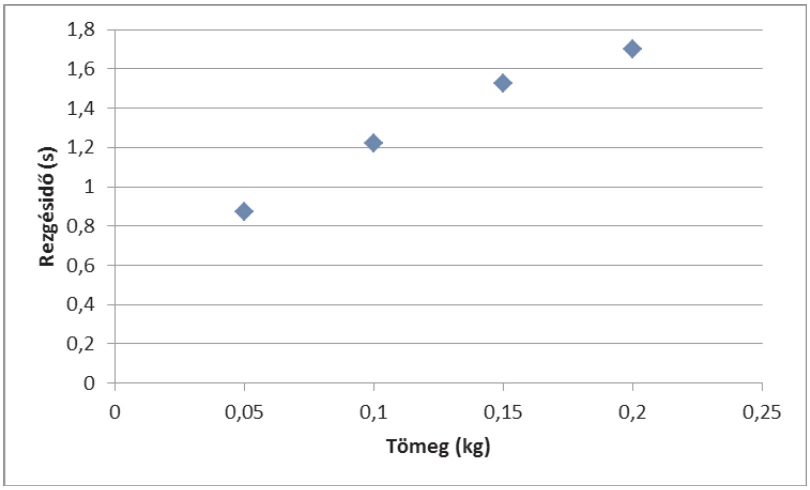
– Hogyan válaszolnának a feltett kérdésre?

Segítségként bemutatásra került egy viszonylag laza rugóra akasztott 50 g-os és egy 100 g tömegű test rezgésbe hozása a rugón, és a rezgés megfigyelése.
Ezt követően egy ténylegesen elvégzett méréssorozat adatai kerültek elemzésre, melyek a következők voltak:

* ELTE TTK Fizikai Intézet

tömeg (kg)	Rezgésidő (s)
0,05	0,872
0,1	1,219
0,15	1,527
0,2	1,698

A tanulók a rezgésidőt úgy mérték, hogy 10 teljes rezgés idejét mérték ténylegesen, majd az eredményeket osztották 10-zel.
Először ábrázoljuk az alapadatokat (1. ábra)!

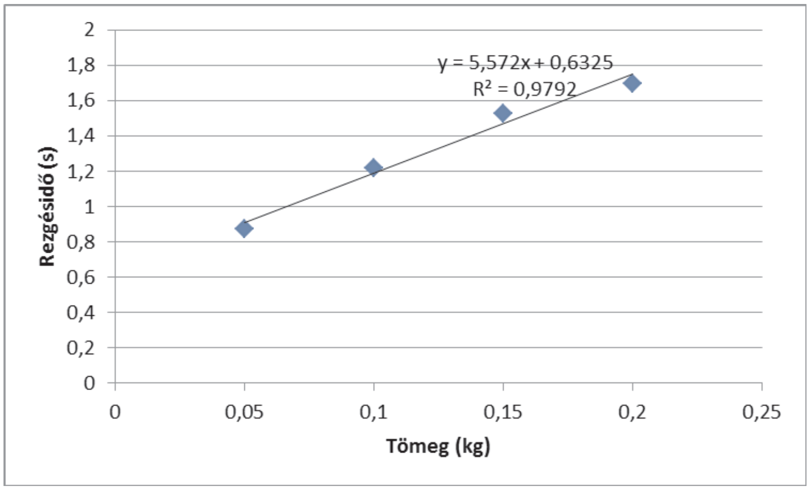


1. ábra. A rezgésidő – tömeg függvényében grafikon

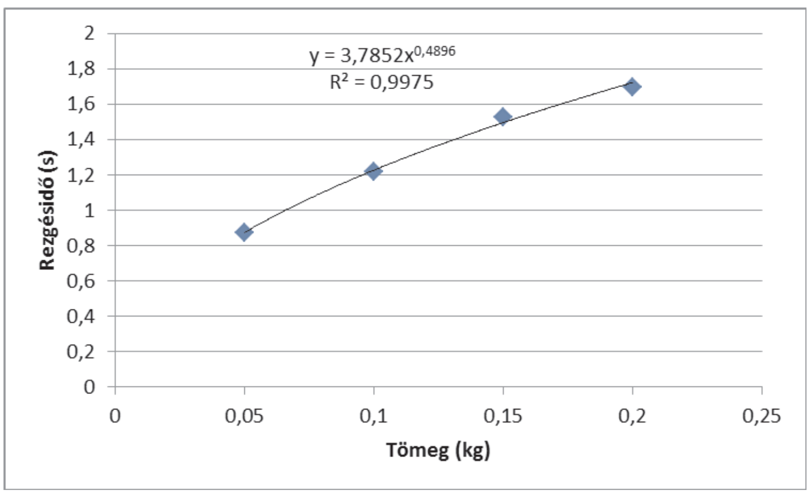
Kérdés, hogy milyen függvény illeszthető a mérési pontokra?
Először illesszünk egyenest, hiszen a legkézenfekvőbb kapcsolat az, ha lineáris függés van a mérési adatok között. Az illesztés mintegy „jóságáról” az R^2 értéke ad felvilágosítást.
Különböző függvények illesztése:
Próbálunk meg először egyenest, lineáris függvényt illeszteni a mérési adatokat ábrázoló pontokra (2. ábra)!
Nézzük meg, hogy nem lesz-e jobb a közelítés, ha hatványfüggvényt próbálunk meg illeszteni az adatokra (3. ábra)!
Amint az ábrából látható, a hatványos közelítés jobbnak tűnik, az R^2 értéke nagyobb. Majdnem gyökös összefüggést kaptunk, de vegyük észre, hogy nem pontosan!
Milyen hibalehetőségek (pl. oldal irányú rezgések is vannak), vagy valami más is lehet?
Próbáljunk meg valamilyen linearizálási lehetőséget, melyet gyakran alkalmazunk olyan esetekben, amikor sejtjük, hogy ténylegesen milyen is lehet a kapcsolat!
A rezgésben valójában a rugó is részt vesz, így valamilyen mértékben a rugó tömegének is lehet szerepe a rezgésidő alakulásában. Ezt effektív tömegnek nevezzük, mely közel egy harmada a rugó teljes tömegének.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi}{D}}, \qquad \text{ahol } \mu = m + m_{\text{eff}} \qquad m = \frac{DT^2}{4\pi^2} - m_{\text{eff}}$$

Az $m(T^2)$ egyenes meredekségből D rugóállandó,
míg a tengelymetszetből m_{eff} határozható meg.

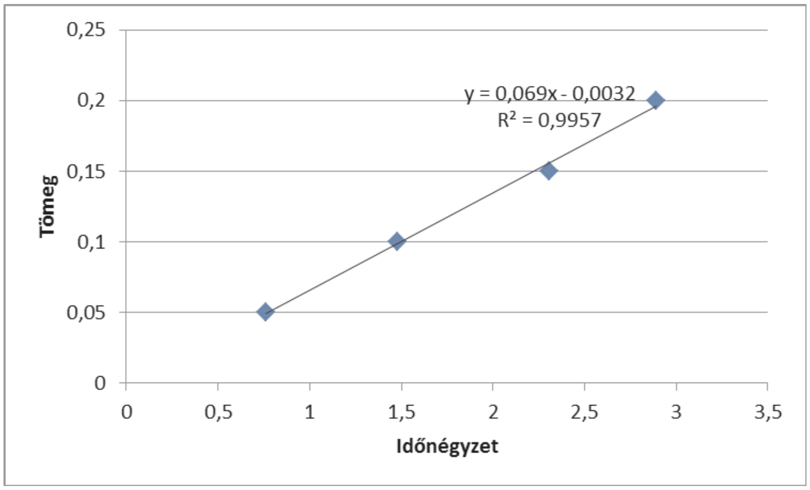


2. ábra. Lineáris közelítés az adatokra



3. ábra. Hatványfüggvényes közelítés az adatokra

T (s)	T^2	m (kg)
0,872	0,76	0,05
1,219	1,48	0,1
1,527	2,31	0,15
1,698	2,89	0,2



4. ábra. A rezgő test tömege a rezgésidő négyzetének függvényében

Ábrázoljuk ennek megfelelően a rezgő test tömegét a rezgésidő négyzetének függvényében (4. ábra)! Az egyenes egyenletének felhasználásával, a meredekségből a következő módon meghatározható a rugóállandó értéke:

$$D = 0{,}069 \cdot 40 = 2{,}76 \text{ N/m},$$

ami egy elég laza rugóra utal.
Mit jelentenek a regressziós egyenes metszéspontjai? Van-e ezeknek fizikai jelentése?
A $T = 0$ időponthoz tartozó metszéspont jelentése az effektív tömeg, mely ebben az esetben $m_{\text{eff}} = 0{,}0032 \text{ kg} = 3{,}2$ gramm, a rugó tömege közelítőleg 10 gramm.
A másik metszéspont, amikor a rugóra nem akasztunk tömeget ($y = 0$), melyhez viszont tartozik egy időérték. Ez azt mutatja meg, hogy mekkora a rugó sajátrezgésének ideje.

$$0{,}069 \cdot x - 0{,}0032 = 0,$$

innen $x = 0{,}0032/0{,}069 = 0{,}0463$, továbbá $x = T^2$, vagyis $T = 0{,}21$ s.
Ezt a rugóhoz tartozó sajátfrekvenciát lehet szemléltetni pl. a nagyrugóval. Leengedünk egy keveset, és elkezdjük rezgetni, majd magára hagyjuk a rezgést. Beáll egy jellegzetes frekvencia. Ha több menetet, vagyis nagyobb tömeget hozunk rezgésbe, akkor a frekvencia is más lesz, de meghatározott érték, mely csak a rugótól függ.
A fenti gondolatmenet arra is példát mutat, hogy egy konkrét méréssorozat eredményeinek matematikai kiértékelése során még további, ténylegesen mérhető, méréssel ellenőrizhető, fontos fizikai jellegű információt kaphatunk a vizsgált rendszerről!

Kémiai reakció sebességének hőmérsékletfüggése

A kémiai reakciók időbeli lefolyása különböző. Vannak olyan reakciók, amelyek pillanatszerűen (10^{-3} s-nál rövidebb idő alatt) zajlanak le. Ilyen például a mészkő és a sósav reakciója:

$$CaCO_3 + 2HCl = CaCl_2 + H_2O + CO_2,$$

ahol a pezsgés a reakcióban keletkező szén-dioxid miatt tapasztalható.

Más reakcióknál a reakció lefolyásához hosszabb időre van szükség. Ilyenek az élő szervezetben lejátszódó biokémiai folyamatok és a jelen gyakorlat során tanulmányozandó fixírsó és sósav reakciója is:

$$\mathrm{Na_2S_2O_3 + 2HCl = 2NaCl + H_2O + SO_2 + \underline{S}}$$

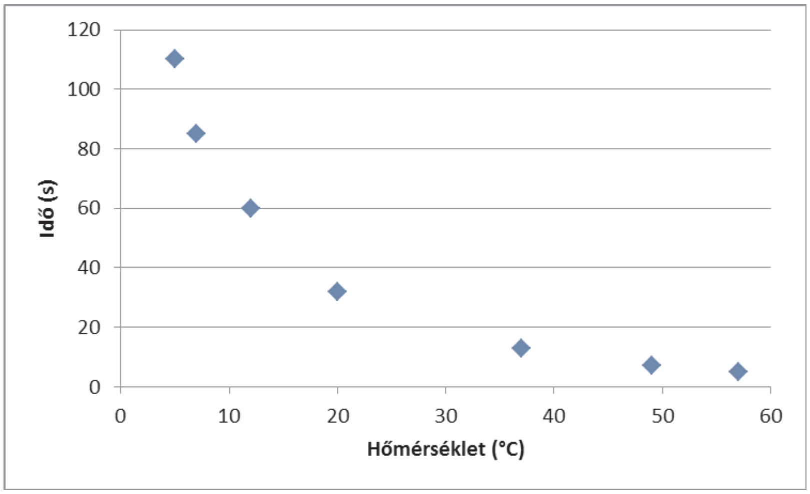
A reakció során vízben oldhatatlan, kolloid állapotú kén keletkezik, ami lehetőséget jelent a reakció végbemeneteléhez szükséges idő mérésére.
A kémiai reakciók időbeli lefutásának jellemzésére a *reakciósebességet* használjuk. A reakciósebesség a folyamatban szereplő valamelyik komponens koncentrációjának időegység alatt bekövetkező változását jelenti.
A reakciósebesség arányos az időegységre eső hatásos részecskeütközések számával, amikor megtörténik az elektron-átrendeződés, vagyis a kémiai reakció. A kedvező ütközések száma a részecskék koncentrációjával arányos. A reakciók sebességét az is befolyásolja, hogy hány molekulának van annyi energiája, amennyi elég a hatásos ütközéshez.
A méréssorozat végrehajtása nagyon egyszerű, kevés eszközzel kivitelezhető, viszont nagyon látványos. Szépen látszik, hogy hideg környezetben, például 10 °C-on nagyon lassan megy végbe a folyamat, míg 60 °C-os vízfürdőben szinte pillanatszerű (5. ábra).

5. ábra. A reakció különböző hőmérsékleteken

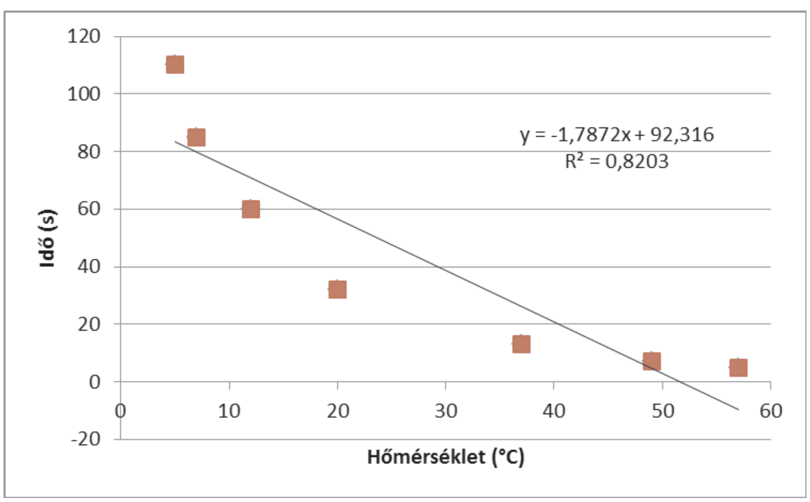
A tényleges mérést nem végeztük el, csak fényképen bemutattuk. Majd ezt követően egy konkrét méréssorozat eredményeit elemeztük.
Mielőtt ténylegesen megnéztük volna a méréssorozat eredményeit, megkérdeztük a diákokat, hogy milyen jellegű kapcsolatra is számítanak. A legtöbben a rugós példához hasonlóan lineáris kapcsolatra tippeltek.
Egy konkrét méréssorozat eredményei:

A vízfürdő hőmérséklete (°C)	A kénkiválás megkezdődéséhez szükséges idő (s)
5	110
7	85
12	60
20	32
37	13
49	7
57	5

Ezt követően ábrázoltuk a közvetlenül mért adatokat, mint a reakció lefolyásának idejét a hőmérséklet függvényében (6. ábra).
Ezt követően különböző trendvonalakat illesztettünk a pontokra, keresve azt, hogy ténylegesen milyen függvénykapcsolat is lehet.

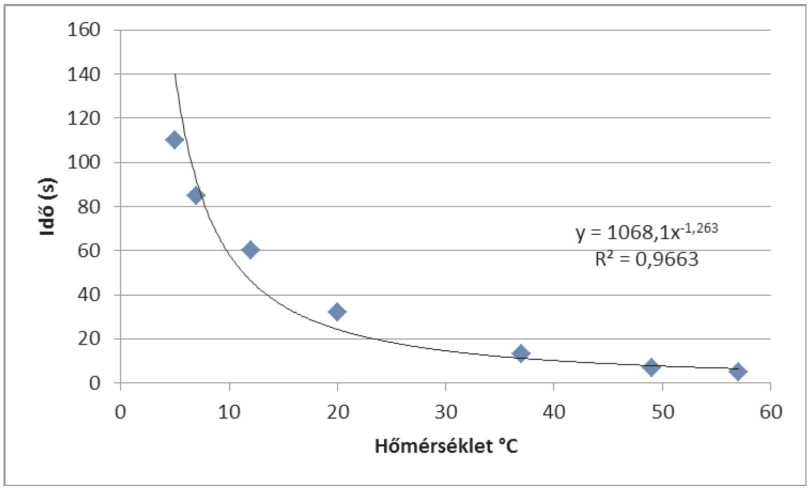


6. ábra. A mért reakcióidő a hőmérséklet függvényében



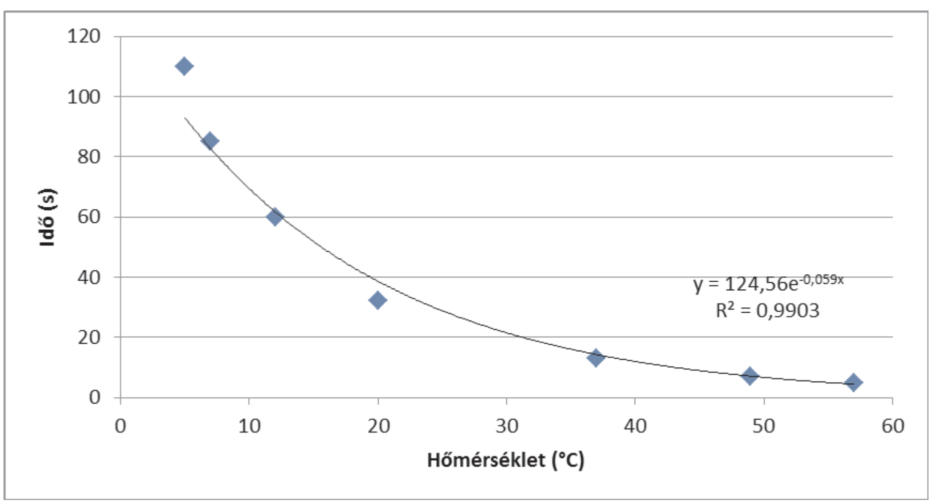
7. ábra. Egyenes illesztése a mérési adatokra

Először a diákok által javasolt *lineáris függést* néztük meg (7. ábra).
Itt beszéltük meg az R^2 jelentését, melyhez nem adtunk teljes valószínűségi értelmezést. Csak annyit jegyeztünk meg, hogy ez egy 0 és 1 közötti szám, és arról ad felvilágosítást, hogy a trendvonal becsült értékei milyen közel állnak a valós adatokhoz.
Ebben az esetben érdemes tovább keresgélni a függvények között, hogy melyik illeszkedik a legjobban a mérési adatokra.
Ezt követően a diákok javaslatára megpróbálkoztunk *hatványfüggvény* illesztésével (8. ábra).



8. ábra. Hatványfüggvény illesztése a mérési adatokra

Megállapítottuk, hogy ez már sokkal jobban illeszkedik az adatokhoz.
Ezt követően tanári javaslatra megnéztük az *exponenciális* illesztést (9. ábra).

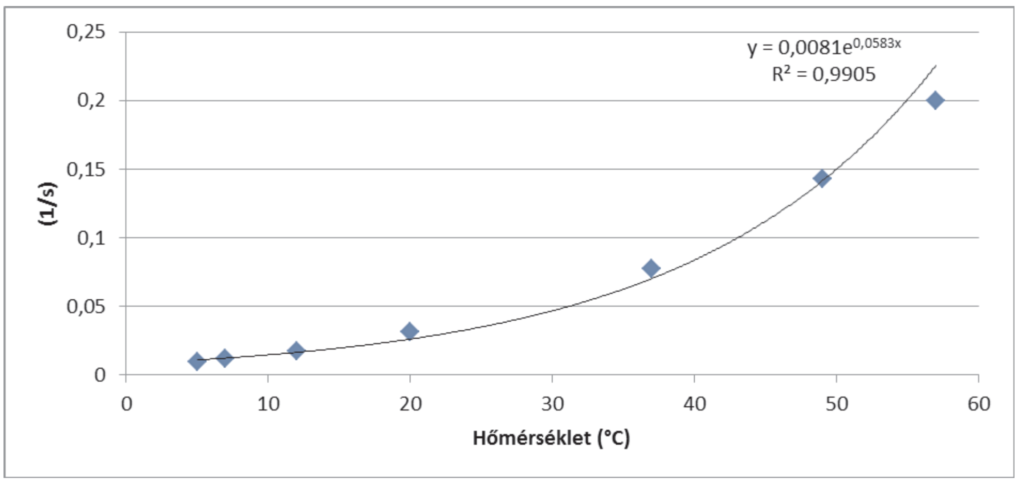


9. ábra. Exponenciális függvény illesztése a mérési adatokra

Megállapítottuk, hogy ez még jobban illeszkedik az adatokhoz, így a továbbiakban az exponenciálisnál maradtunk.
Tovább dolgoztunk a mérési adatokkal, és rájöttünk, hogy eddig valójában még nem a reakció sebességével foglalkoztunk, hanem csak a reakció végbemeneteléhez szükséges idővel. A reakció sebességével a reakcióidő reciproka lesz arányos. A reakciósebesség azonban a koncentrációváltozás/idő-vel

arányos. A mérés során ügyeltünk arra, hogy a koncentrációváltozás minden esetben azonos legyen, 3-3 cm^3 oldatot öntöttünk össze. Tehát a reakcióidő reciproka ténylegesen arányos lesz a reakciósebességgel.
Tehát vegyük a mért reakcióidő reciprokát, és azt ábrázoljuk a hőmérséklet függvényében (10. ábra)!

A vízfürdő hőmérséklete (°C)	A reakcióidő reciproka (1/s)
5	0,0091
7	0,012
12	0,017
20	0,031
37	0,077
49	0,143
57	0,2



10. ábra. Exponenciális függvény illesztése a reakciósebességgel arányos mennyiség és a hőmérséklet kapcsolatát ábrázoló pontokra

Ezekre a pontokra már ráillesztettük az exponenciális trendvonalat az előző meggondolások alapján.
Az úgynevezett **Arrhenius-egyenlet ismeretében a reakció aktiválási energiáját is kiszámíthatunk.**
Az Arrhenius-egyenlet fizikai értelemben vett (egy részecskére jutó) energiát tartalmazó alakja (amely nem a moláris aktiválási energiát tartalmazza) a következő ($k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K, a Boltzmann-állandó):

$$k = A \cdot e^{-\frac{E_a}{k_B T}}$$

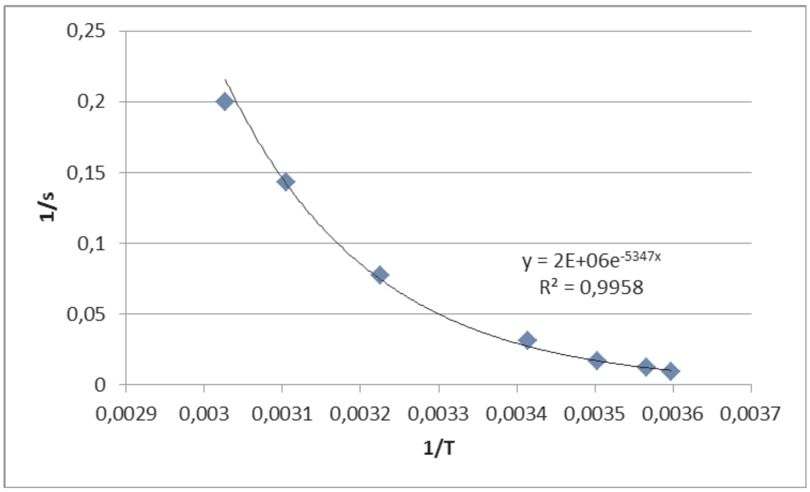
Az Arrhenius-egyenlet moláris (m) aktiválási energiát tartalmazó formája pedig ($R = 8{,}314$ J/molK, az egyetemes gázállandó):

$$k = A \cdot e^{-\frac{(E_a)m}{RT}}$$

T a Kelvinben mért hőmérséklet.
A k arányos a reakciósebességgel, melyet a reakcióidő reciprokával vettünk arányosnak.
Tehát az aktiválási energia a kitevőből meghatározható!
De ehhez még további átalakításokra van szükség!

A hőmérsékletet át kell írni Kelvin fokokba, és még annak is a reciprokát kell venni, mjad ábrázoljuk a pontokat és illesszünk ezekre exponenciális függvényt (11. ábra)!

T (K)	$1/T$	reciprok (1/s)
278	0,0036	0,0091
280	0,0036	0,012
285	0,0035	0,017
293	0,0034	0,031
310	0,00320	0,077
322	0,0031	0,143
330	0,0030	0,200



11. ábra. Exponenciális függvény illesztése a reakciósebességgel arányos mennyiség és az abszolút hőmérséklet reciprokának kapcsolatát ábrázoló pontokra

A kitevő alapján
– **egyetlen részecske aktiválási energiája:**
$E_a = -m \cdot k_B = -(-5347) \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \approx \mathbf{7{,}4 \cdot 10^{-20}}$ **J**,
vagy ha inkább mólokra szeretnénk megadni, mely a kémiában inkább szokás:
– **moláris aktiválási energia:**
$(E_a)_m = -m \cdot R = -(-5347) \cdot 8{,}314 \approx \mathbf{45\ kJ/mol}$
Megvizsgáltuk az aktiválási energiára kapott értékek realitását is. Megállapítottuk, hogy ténylegesen a kémiai reakciók esetében a vegyértékelektronok átrendeződéséhez 10^{-20} J nagyságú energiák tartoznak. Továbbá a különböző kémiai táblázatokban a reakciók során felszabaduló/szükséges energiákra kJ nagyságrendű értékek vannak megadva. Tehát nagyságrendileg jó eredményt kaptunk ezzel az egyszerű módszerrel.

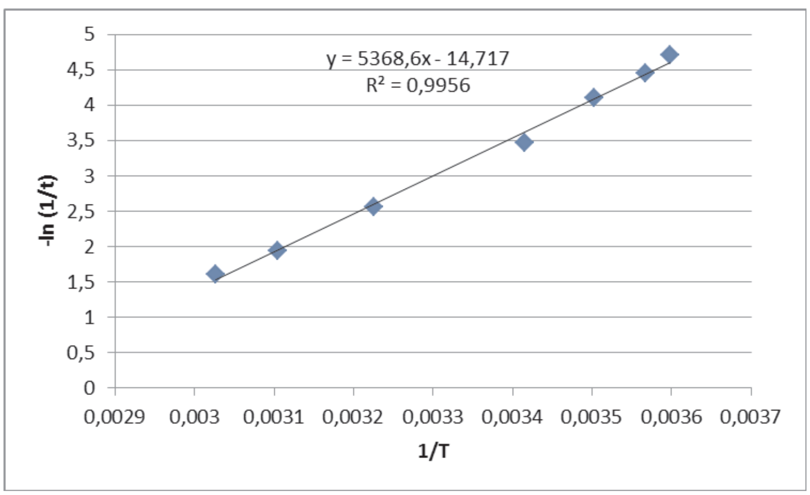
Tudománytörténet, nem is olyan régről

Valójában régen is ilyen jellegű módszerekkel határoztak meg sok energiaértéket, csak éppen nem volt számítógép és Excel program, mely kiírta volna a terdvonal egyenletét. Mit is tettünk mi magunk is jó 30 ével ezelőtt?

Linearizáltuk az adatokat és azokat ábrázoltuk mm papíron. Majd szemre behúztuk az egyenest és leolvastuk annak meredekségét.
Linearizálva:

$$\ln k\left(\frac{1}{T}\right) = \ln A + \left(-\frac{E_a}{k_B}\right) \cdot \frac{1}{T} \quad \text{vagy} \quad \ln k\left(\frac{1}{T}\right) = \ln A + \left(-\frac{(E_a)m}{R}\right) \cdot \frac{1}{T}$$

$1/T$ (1/K)	• ln($1/t$)
0,003598	4,70048
0,003567	4,44265
0,003503	4,09434
0,003415	3,46574
0,003226	2,56495
0,003105	1,94591
0,003027	1,60944



12. ábra. A linearizált függvény

A meredekség természetesen közel azonos azzal, amit az exponenciális kifejezés kitevőjéből ki lehet olvasni (12. ábra), mi más is lenne?
Az elvégzett kísérlet nem egy pontos reakciókinetikai mérés, mivel csak egy vizuálisan detektálható ponthoz tartozó időt tudjuk mérni, melynek a következő hibái vannak:

- az opálosodáskor nem ismerjük a valódi tioszulfát-koncentrációt,
- a kén a különböző hőmérsékleteken másképp oldódik, így a detektálásban adódik hiba,
- az opálosodás nem jól definiált időpont.

További hibalehetőségek:

- az oldatok és a környezet termikus egyensúlya sincs biztosítva,

- az időmérésnek is van pontatlansága,
- az oldatok keveredése nem teljes.

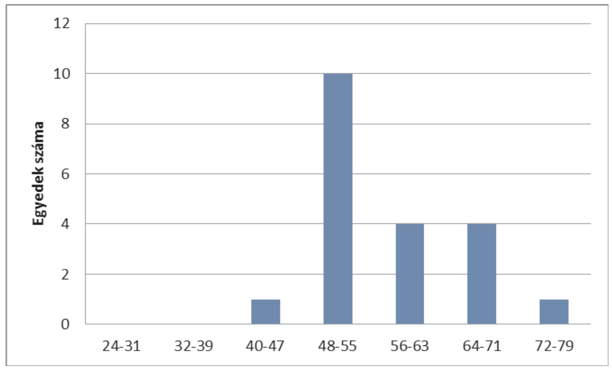
Ezekkel a hibákkal viszont nincs probléma, hiszen egy egyszerű osztálytermi mérésnek nem kell kinetikai vizsgálat szempontjából korrektnek lennie.

Testtömeg és magasság, van-e összefüggés e kétféle jellemző között?

Mielőtt elkezdtük volna az adatok begyűjtését, beszélgettünk a tanulókkal a vérképről, mivel ilyet már mindenki látott. Megállapítottuk, hogy az sokféle jellemzőt tartalmaz, és ezek mindegyik esetben számszerűsítve vannak. Továbbá jelölve van az a tartomány, melyről úgy gondoljuk, hogy ha egy ember esetében az adott jellemző érték a megadott intervallumon belül található, akkor az jónak mondható. Ellenben a jóként megadott tartományból kilógó érték valamilyen betegségre utal.
Felhívtuk a figyelmet arra, hogy minden esetben tartomány van megadva, nem pedig egyetlen érték. Mindannyian különbözőek vagyunk, egyéni jellegzetességeink vannak, függetlenül attól, hogy egy fajhoz tartozunk. Majd feltettük a kérdést, hogy ez milyen más, további esetekben van így? És tudnánk-e mi is valamilyen tartományt megvizsgálni, melyhez tartozó adatokat biztos mindenki fejből tudja saját magáról? Ekkor került elő, hogy ilyen tulajdonság például az emberek magassága és a testtömege. Nem vagyunk egyforma magasak, de azért ez nem jelenti azt, hogy bármilyen kicsik, vagy akármilyen magasak lennénk.
Majd ezt követően intervallumokat célszerű kialakítani mind a tömegadatokból, mind pedig a magasságadatokból, és azokat ábrázolni oszlopdiagramon.
Továbbá érdekes kérdés lehet, hogy egy csoport esetében, mely lehet például egy osztály, lehetne-e valamilyen módon csoportokba rendezni a diákokat magasságuk/testtömegük szerint? És van-e összefüggés a két jellemző között?
A kapcsolat pedig úgy vizsgálható, ha egy koordináta-rendszerben ábrázoljuk az összetartozó tömeg és magasságadatokat, majd ez után megnézzük, létezik-e valamilyen függvénykapcsolat az adatok között.
Az előadások részt vett diákok összetartozó adatai az alábbi táblázatban találhatók:

	magasság(cm)	tömeg(kg)
1.	143	42
2.	164	55
3.	158	50
4.	152	52
5.	162	53
6.	170	70
7.	173	71
8.	158	55
9.	156	54
10.	155	50
11.	154	52
12.	155	55
13.	165	65
14.	167	58
15.	168	62
16.	169	57
17.	173	65
18.	176	70
19.	175	75
20.	158	55

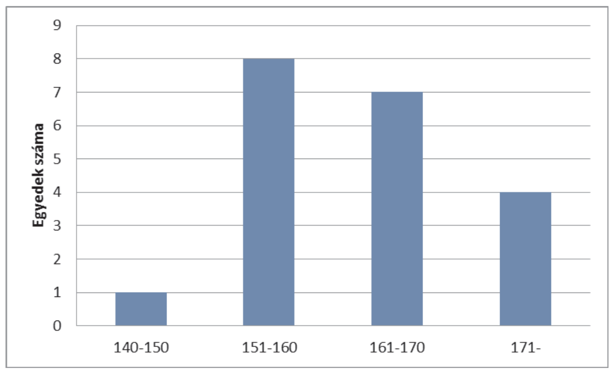
intervallum (kg)	Szám
24-31	0
32-39	0
40-47	1
48-55	10
56-63	4
64-71	4
72-79	1



13. ábra. A testtömegek eloszlása

A testtömegek ábrázolása (13. ábra):
A testmagasságok ábrázolása (14. ábra):

Intervallum (cm)	Szám
140-150	1
151-160	8
161-170	7
171-	4

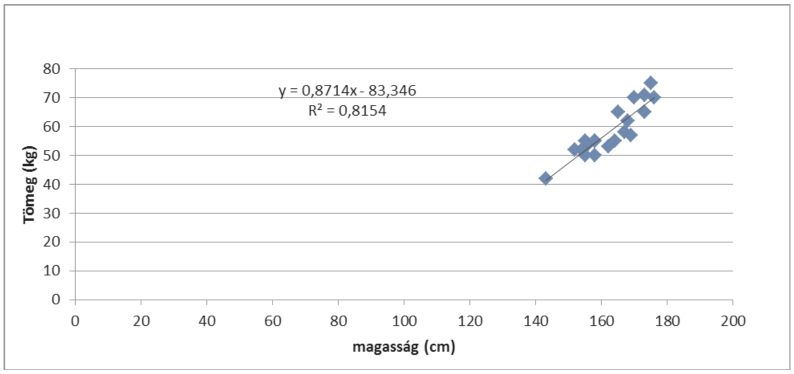


14. ábra. A testmagasságok eloszlása

Az összetartozó tömeg és magasságadatok ábrázolása (15. ábra):
Az adatok alapján egyértelmű volt a diákok számára, hogy a két jellemző között van kapcsolat, mely a fenti formában szemléletessé tehető.

Összefoglalás

A körülöttünk lévő világban való eligazodáshoz bizonyos számszerű (kvantitatív) jellemzők bevezetése szükséges. Össze kell hasonlítani az egyes tárgyakat különböző tulajdonságaik alapján. Nem jellemezhetjük például a tárgyak nagyságát egyszerűen csak úgy, hogy az egyik „**kicsi**”, a másik pedig „**nagy**”. Egységeket kell bevezetnünk, majd ezeket használva már képesek vagyunk összehasonlításokat tenni, vagyis mérni.
A mérési adatokat azonban „**kezelni**” is kell tudni. Egy számsor nem sokat mond. Célszerű kétdimenziós módon, grafikusan is megjeleníteni az adatokat, illetve az azokból számított mennyiségeket.
A különböző fizikai mennyiségek közti kapcsolat nem mindig lineáris. Sőt, általában *nem lineáris*, bár sokszor azzal közelítjük. Ám ezt nem minden esetben tehetjük meg. De az adatok megfelelő konvertálásával ezekben az esetekben is *lineárissá alakíthatjuk* a kapcsolatot. *Bár ez napjainkban már nem szükséges*, hiszen pl. az Excel is lehetővé teszi, hogy az illesztett görbe paramétereit egyszerűen leolvashassuk.



15. ábra. Az összetartozó testtömegek és testmagasságok

Felhasznált irodalom

`http://www.vpg.hu/sites/default/files/minko_david_szep_andras_farkas_daniel.pdf` utolsó látogatás 2014. május 5.

Internetes adatok – szándékosan középiskolai tanulók mérési adatait használtuk fel az elemzéshez, mintegy ezzel is jelezvén, hogy a mérés a közoktatásban található egyszerű eszközökkel is elvégezhető, nem csak egyetemi laboratóriumban.

Radnóti Katalin (1982): A Boltzmann-eloszlás alkalmazása kémiai példákra. *Fizikai Szemle*. 1982/5. 178-182.o.

Tóth Eszter (1982): *Fizika IV*. Tankönyvkiadó. Budapest.

Radnóti Katalin - Tóth Eszter (1986): *Tanári kézikönyv*. Gimnázium, Fizika IV. osztály. Tankönyvkiadó. Budapest.

Nagy Mária, Radnóti Katalin (2013): Problémamegoldás a Boltzmann-eloszlás témakörében. *Fizikai Szemle*. LXIII. évfolyam. 7-8. szám. 257-261. oldalak
`http://wwwold.kfki.hu/fszemle/archivum/fsz130708/nagy130708.html`

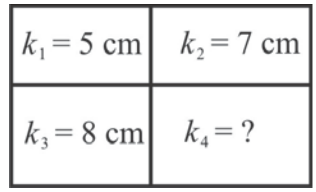
Radnóti Katalin – Nagy Mária (2013): A Boltzmann-eloszlás középiskolai feldolgozásának lehetőségei I. , II., III. *A Fizika Tanítása.* MOZAIK Kiadó. Szeged. 2013/2. október 3–15. oldalak. december 3–11. oldalak. március 3–11. oldalak.
`http://www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPfolyoirat.php?op=fizika`

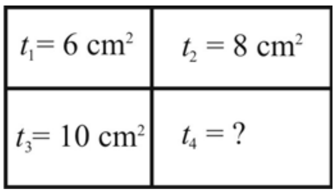
Kósa Tamás

Pepita

1. Egy téglalapot az oldalaival párhuzamos egyenesekkel négy kis téglalapra bontottunk. Három kis téglalap kerületét ismerjük: $k_1 = 5$ cm, $k_2 = 7$ cm, $k_3 = 8$ cm.

Mekkora a negyedik téglalap kerülete?





2. Egy téglalapot az oldalaival párhuzamos egyenesekkel négy téglalapra bontottunk.

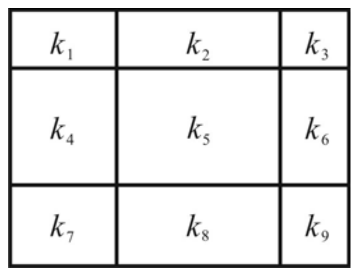
Három kis téglalap területét ismerjük: $t_1 = 6$ cm^2, $t_2 = 8$ cm^2, $t_3 = 10$ cm^2.

Mekkora a negyedik téglalap területe?

3. Egy téglalapot az oldalaival párhuzamos egyenesekkel kilenc kis téglalapra bontottunk. Megkérdezhetsz néhányat a kis téglalapok kerületei közül, ahhoz hogy meghatározd a nagy téglalap kerületét.

a) Legkevesebb hány kérdésre van szükséged?

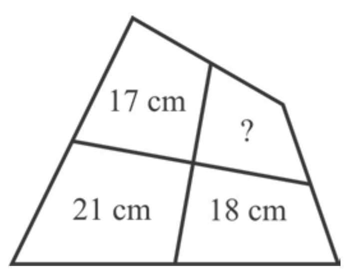
b) Te megmondhatod, hány téglalap kerületét kéred majd, de aztán én választom ki, melyek legyenek ezek. Legkevesebb hány kis téglalap kerületét kell kérned, hogy biztosan meg tudd mondani a nagy téglalap kerületét?

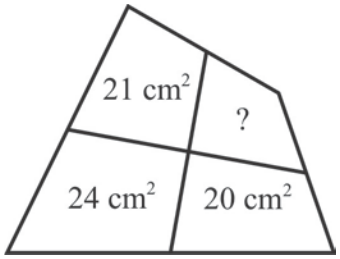


	20	**14**	
12			**?**
8		**15**	
	25		**21**

4. Egy téglalapot az oldalaival párhuzamos egyenesekkel tizenhat kis téglalapra bontottunk. Néhánynak ismerjük a területét. Határozd meg a szürke téglalap területét!
(Az ábra csak illusztráció, a méretek nem feltétlenül helyesek.)

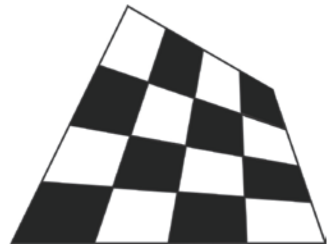
5. Egy konvex négyszög szemközti oldalfelező pontjait összekötve a négyszöget négy kis négyszögre bontottunk. Három négyszög kerületét ismerjük. Határozd meg a negyedik négyszög kerületét!



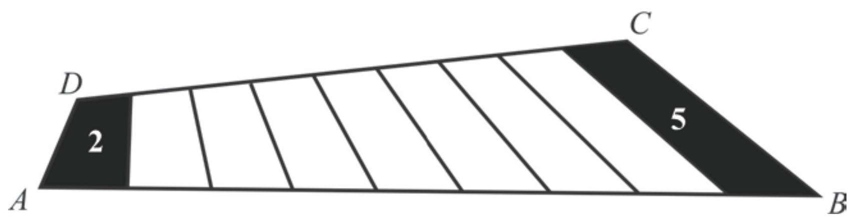


6. Egy konvex négyszög szemközti oldalfelező pontjait összekötve a négyszöget négy kis négyszögre bontottunk. Három négyszög területét ismerjük. Határozd meg a negyedik négyszög területét!

7. Egy konvex négyszög szemközti oldalainak negyedelő pontjait összekötve a négyszöget tizenhat kis négyszögre bontottunk. A fekete négyszögek területeinek összege vagy a világos négyszögek területeinek összege a nagyobb?



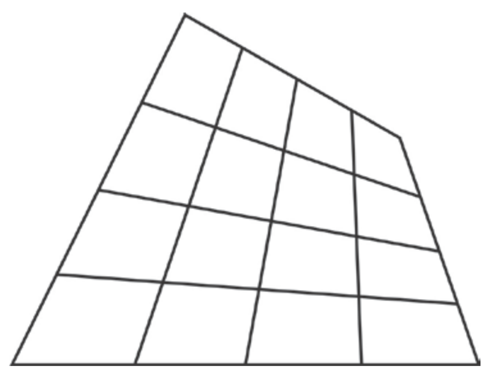
8. Az $ABCD$ négyszög AB és CD oldalát 9-9 egyenlő részre osztottuk és a megfelelő sorszámú osztópontokat összekötöttük, így az $ABCD$ négyszöget 9 kis négyszögre bontottuk. Az AD oldalon lévő négyszög területe $2\ \mathrm{cm}^2$, a BC oldalon lévő négyszög területe $5\ \mathrm{cm}^2$. Mekkora az $ABCD$ négyszög területe?



9. Egy konvex négyszög szemközti oldalainak negyedelő pontjait összekötve a négyszöget tizenhat kis négyszögre bontottuk.

a) Legalább hány kis négyszög területét kell megtudnunk ahhoz, hogy a nagy négyszög területét meg tudjuk adni?

b) Legalább hány kis négyszög területét kell megtudnunk ahhoz, hogy minden kis négyszög területét meg tudjuk adni?



2014. május 30-án pénteken új helyszínen folytattuk a sorozatot. Bojár Gábor meghívására a következő alkalom helyszíne a Graphisoft Park (1031 Budapest, Záhony utca 7.) volt
A különleges helyszín szépsége, érdekessége a tartalmas program mellett tovább gazdagította a résztvevők élményeit. A parkban együtt csodálhattuk a Duna-part természeti szépségei mellett az ipari műemlékek értő módon hasznosított épületeit. Betekintést kaptunk a Bojár Gábor által vezetett egyetem (AIT) működésébe. A Parkról és az egyetemről további részletek ismerhetők meg az alábbi linkeken.
`http://www.graphisoftpark.hu/` és `http://www.ait-budapest.com/`
Program
Borsa Gergő: Tájékoztató séta a Graphisoft Parkban
Horányi Gábor: Még mindig minden nézőpont kérdése, avagy légy az ismerősünk (További nehezen megoldható fizika (?) feladatok könnyedén.)
Csapodi Csaba: A számelmélettől a statisztikáig – a GeoGebra lehetőségei a matematika különböző területein.

Csapodi Csaba

A számelmélettől a statisztikáig – a GeoGebra lehetőségei a matematika különböző területein II.

Ezen a délutánon annak bemutatására tettünk kísérletet, hogy milyen módon alkalmas egy számítógéppel megtámogatott óra a differenciált óravezetésre. Várható volt, hogy a délután folyamán a programra érkező diákok nagyon különböző tudásszinttel rendelkeznek a GeoGebra használatával kapcsolatban. Így három különböző feladat-csomag közül választhattak a részt vevők. A kezdőknek szóló csomagot természetesen kiegészítette a program rövid bemutatása.

A három feladatcsomag:

I. Kezdőknek

1. feladat. Rajzolj egyenlőszárú háromszöget, szabályos háromszöget és rombuszt a program segítségével!
2. feladat. Rajzold meg egy háromszög beírható és körülírt körét!

II. Középhaladóknak

1. feladat. Készíts a Pitagorasz-tétel bizonyításához egy demonstrációs anyagot!
2. feladat. Rajzold meg a program segítségével egy háromszög Euler-egyenesét!

III. Haladóknak

1. feladat. Ábrázold adott kerületű téglalapok területét a téglalap egyik oldala hosszának függvényében!
2. feladat. Adott két pont (A és B) a síkon. Keresd meg azon pontok mértani helyét a síkon, melyek az A ponttól kétszer akkora távolságra vannak, mint a B ponttól!

A sorozat utolsó programnapján az ELTE TTK oktatói tartottak a résztvevő diákoknak és tanároknak magas színvonalú, érdekes és gondolkodtató előadásokat, foglalkozásokat. Korunk aktuális tudományos problémáival találkozhattak a résztvevők.

2014. május 31. szombat

Helyszíne: ELTE TTK 1117 Pázmány Péter sétány 1.

Jánosi Imre: „A közelgő energiaválság küszöbén: Miért nem jelentenek valódi alternatív megoldást a jelenleg ismert megújuló energiatermelő eljárások?”

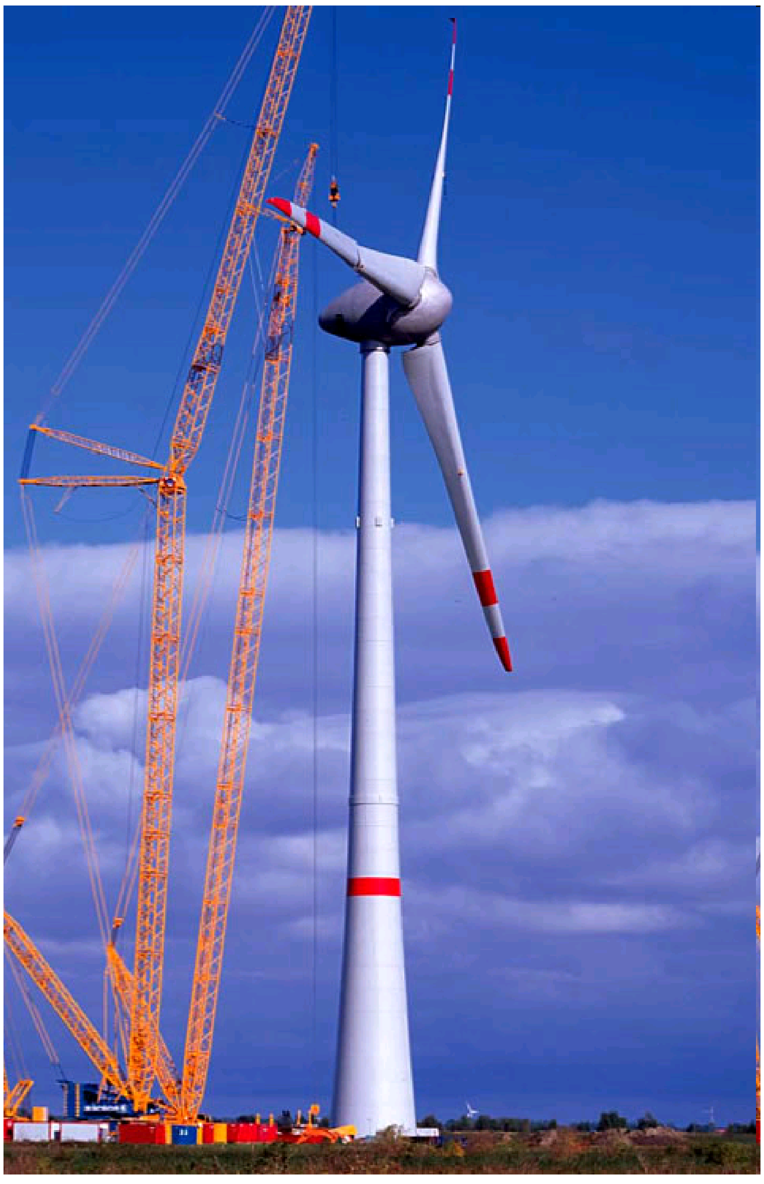
Radnóti Katalin és *Nagy Mária:* A nukleáris energiatermelés új lehetőségei

Munkácsy Katalin: Mérések.Szabadtéri matematikai program

Róka András: Egymásra épülés

Wintsche Gergely: Egy kísérlet nem kísérlet

Jánosi Imre előadásának bemutatója elérhető a `http://lecso.elte.hu/download/elte14-ren-energy.pptx` linken. Érdemes elolvasni a Természet Világa 2009-es számában megjelent hasonló témájú, Megújuló energia. Számoljunk utána c. cikkét.

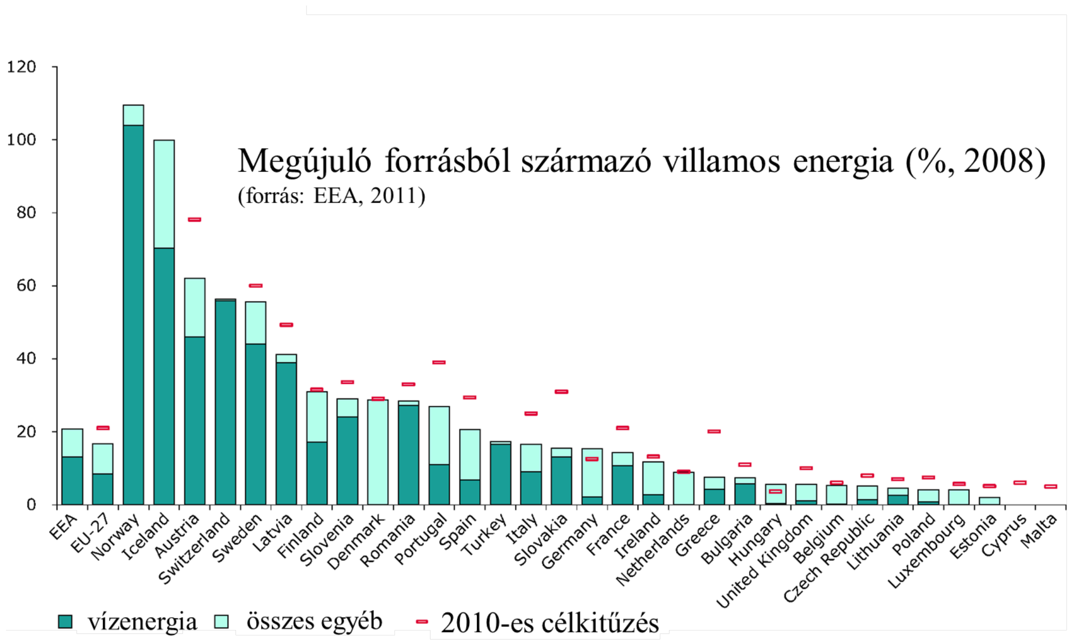


Jánosi Imre

A közelgő energiaválság küszöbén: Miért nem jelentenek valódi alternatív megoldást a jelenleg ismert megújuló energiatermelő eljárások?

A modern társadalom jelenleg az energiát teljesen a saját pillanatnyi igényének megfelelően fogyasztja. Senki sem gondolkodik arról, mikor kapcsoljon be egy turmixgépet vagy fűnyírót, munkába a többség azonos ritmusban jár, borús estéken pedig mindenki lámpát gyújt. Az világos, hogy az alternatív forrásokra történő teljes átállásnak komoly ára lesz, arányaiban sokkal többet költenek majd utódaink energiára. Ennek fizikai oka egyszerűen érthető: az összes jelenleg ismert forrás energiasűrűsége sokkal kisebb, mint amennyi a fosszilis energiahordozók egységnyi tömegének elégetésekor felszabadul. Így aztán a megújuló termeléshez fajlagosan sokkal több eszközre, bonyolultabb szerkezetre van szükség a csordogáló energia lehető legnagyobb területről történő „begyűjtéséhez”. Ha nem sikerül a nagyléptékű tárolásra vagy a földrészeken átívelő szállításra a közeli jövőben gazdaságos megoldást találni, akkor fölöttébb ki leszünk szolgáltatva a megújuló források pillanatnyi hozzáférhetőségének is. Ennek lehetséges társadalmi vonzataival nem nagyon foglalkozik senki, pedig izgalmas kérdések szép számmal merülnek fel. Lehetséges, hogy az időjárás előrejelzésénél még fontosabb lesz az energia előrejelzése, és az emberi tevékenység sokkal inkább függeni fog attól, hogy van-e éppen villany otthon és a munkahelyen.

Jánosi Imre: Megújuló energia. Számoljunk utána! Természet Világa 2009. november 502–505.



Radnóti Katalin – Nagy Mária

A nukleáris energiatermelés új lehetőségei

Előadásunkat egy úgynevezett Nukleáris totóval kezdtük, melyet olyan rendezvényeken szoktunk használni a beszélgetés elindításához, melyeken kifejezetten azért veszünk részt, hogy tájékoztassuk a lakosságot a nukleáris energiáról. A helyesnek tartott válaszokat vastag betűvel írjuk ott, ahol lehet ilyenről beszélni.

1. Mi jut eszébe, ha meghallja azt a szót, hogy atom?
   (a) energia
   (b) bomba
   (c) magas színvonalú technika
   (d) bomba és energia
   (e) az anyagok építőeleme

2. Mit gondol a nukleáris energiáról?
   (a) hasznos
   (b) káros
   (c) veszélyes az emberiségre nézve
   (d) megfelelő technikával hasznos
   (e) szükséges, de veszélyes
   (f) veszélyes, de megfelelő biztonsági technikával alkalmazható

3. Milyen megoldást javasol a jövő energiaigényének kielégítésére?
   (a) kőolaj, földgáz
   (b) szénenergia
   (c) napenergia
   (d) nukleáris energia
   (e) biomassza
   (f) vízenergia

4. Mit tud az atombombában végbemenő folyamatokról?
   (a) **szabályozatlan nukleáris reakció**
   (b) kémiai reakció
   (c) magfúzió
   (d) semmit

5. Mit tud az atomerőműben végbemenő folyamatokról?
    (a) **szabályozott nukleáris reakció**
    (b) szabályozott kémiai folyamat
    (c) magfúzió
    (d) semmit
6. Ön szerint egy atomerőmű környezetében – normál üzemi szituációban – hányszorosára emelkedik a sugárzási szint a természetes háttérsugárzáshoz képest?
    (a) nem növekszik
    (b) elhanyagolható mértékben növekszik
    (c) kétszeresére nő
    (d) tízszeresére nő
    (e) veszélyes mértékben növekszik
7. Ön szerint melyik erőműtípus *nem* bocsát ki üvegházhatású gázokat?
    (a) Szénerőmű.
    (b) Olajtüzelésű erőmű.
    (c) Kombinált gáz/gőzerőmű
    (d) **Atomerőmű**
8. Ön szerint fertőző-e a sugárbetegség?
    (a) Igen
    (b) **Nem**
    (c) Igen, de csak cseppfertőzés útján
    (d) Igen, de csak nemi úton terjed
9. Hol, milyen célból alkalmaznak radioaktív sugárforrásokat?
    (a) Hegesztési varratok ellenőrzésére
    (b) Mezőgazdasági termékeke sterilizálására
    (c) Rákos daganatok elpusztítására
    (d) **Ezekre mind**
10. Ha egy radioaktív atommag felezési ideje 1 év, akkor 1000 darab ilyen magból mennyi marad 3 év múlva?
    (a) **125 darab**
    (b) 1526 darab
    (c) 250 darab
    (d) $\sqrt[3]{1000}$

11. Ön szerint a Paksi Atomerőművet érheti-e a csernobilihoz hasonló katasztrófa?
    (a) Igen, bármikor előfordulhat
    (b) **Nem, mert más típusú reaktorok üzemelnek Pakson, amelyekben reaktorfizikailag sem állhat elő a csernobilihoz helyzet**
    (c) Igen, de megfelelő üzemeltetéssel ez megelőzhető
12. Ismeri-e a Paksi Atomerőmű honlapját?
    (a) Igen
    (b) Nem
    (c) Sejthettem volna, hogy van
13. Hogyan fizeti a Paksi Atomerőmű Zrt. a nukleáris hulladék elhelyezésének és az erőmű majdani leszerelésének költségeit?
    (a) Eladja a kiégett fűtőelemeket Oroszországnak
    (b) Nem ő fizeti
    (c) **A Központi Nukleáris Pénzügyi Alapon keresztül, amelybe az eladott villamosenergia után fizet**
    (d) A paksi dolgozók béréből vonják le

13+1. Ön szerint mi legyen a paksi atomerőmű jövője?
    (a) Üzemeljen az eredetileg tervezett üzemideig a megfelelő műszaki, biztonsági feltételek betartásával
    (b) Azonnal állítsák le
    (c) A megfelelő műszaki, biztonsági és gazdasági feltételek teljesülése esetén akár az eredetileg tervezett üzemidő meghosszabbítható

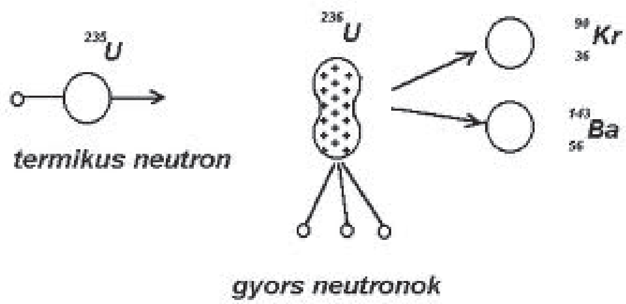
Mit kell tudni az atomerőműben végbemenő folyamatokról?

Az atomerőműben úgynevezett nukleáris reakció megy végbe, mely konkrétan az urán 235-ös tömegszámú izotópjának két részre hasadása. Az urán mintegy 30 különféle módon hasadhat, ezek közül egy lehetségest mutat az alábbi ábra (1. ábra).
Mivel egynél több neutron keletkezik (átlagosan 2,3), ezért további hasadások jöhetnek létre, úgynevezett láncreakció alakulhat ki (2. ábra).

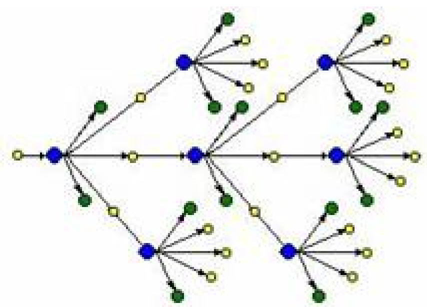
Főbb reaktortípusok

Termikus és gyors reaktorok

A maghasadás során gyors neutronok keletkeznek. Amennyiben ezeket a gyors neutronokat lelassítják, azaz akkora energiájuk lesz az úgynevezett moderátoranyaggal történő ütközések során, mint amekkora az adott hőmérsékleten jellemző átlagos mozgási energia, akkor termikusnak nevezik. Innen az elnevezés.



1. ábra. A maghasadás folyamatának ábrázolása



2. ábra. A láncreakció folyamatának ábrázolása

A gyors neutronok egy részét képes befogni az urán másik izotópja, a 238-as tömegszámú, mely így átalakul szintén jól hasadó plutóniummá. Ebben az esetben a reaktor működése során keletkezik az újabb hasadóanyag, ezért ezt a típust tenyésztőreaktornak is nevezik. Ilyen reaktorokból kevés működik energiatermelési céllal. Több kísérleti típust fejlesztettek, és fejlesztenek ki napjainkban. A villamos energia előállításában főleg a termikus reaktorok vesznek részt, ezért a továbbiakban ezekkel foglalkozunk.

$$^{238}_{92}U + n \to \underset{\text{nem stabil}}{^{239}_{92}\mathrm{U}} \overset{\beta^-}{\to} \underset{\text{neptunium}}{^{239}_{93}\mathrm{Np}} \overset{\beta^-}{\to} \underset{\text{plutonium}}{^{239}_{94}\mathrm{Pu}}$$

Termikus reaktorok

Az energiaellátásban négy fő típus vesz részt, melyek a következők:

- *Könnyűvíz moderátoros*, mely 12-15 MPa nyomáson van, ezért ezt nyomttvizes típusnak is nevezik. Ez a típus adja a működő reaktorok 65%-át, és Pakson is 4 darab ilyen üzemel.
- *Nehézvíz moderátoros* (típusmegjelölése: CANDU). Ez a típus adja a működő reaktorok 5%-át. Ilyenek üzemelnek Kanadában, Indiában és van egy reaktor Romániában.
- *Forralóvizes* típus, melyek elsősorban Japánban és Németországban üzemeltek, körülbelül 100 darab, mely 22%-ot jelent.
- *Grafit moderátoros*, vízhűtéses, csatorna típusú reaktor, melyek a volt Szovjetunió utódállamaiban épültek.

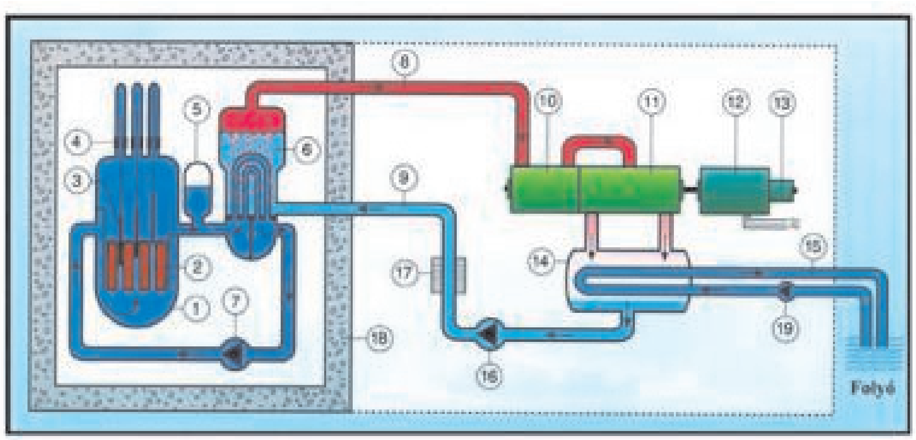
Példaként nézzük végig, milyen energiaátalakulások történnek egy nyomott könnyűvizes típusú **atomerőműben**!

Az úgynevezett fűtőanyag ebben az esetben az urán 235-ös izotópja, mely a természetesen uránban csak 0,7%-ban van jelen. De ebben nem lenne önfenntartó a láncreakció, ezért az uránt ebben az izotópban dúsítják. Jelenleg 4,2%-os dúsítást alkalmaznak. Az üzemanyag tehát 4,2%-ban dúsított uránoxid, melyet kis tablettákban töltenek be egy hosszú, úgynevezett üzemanyagpálcába, mely cirkóniumból készül. Majd ezeket a pálcákat kötegekké rendezik. Ez az úgynevezett üzemanyagrúd. A Paksi Atomerőmű egy reaktorblokkjában 42 tonna urán található.

Az urán 235-ös tömegszámú izotóp elhasad két kisebb rendszámú atommagra, miközben 2-3 neutron szabadul fel. Egy hasadás során 32 pJ energia szabadul fel, mely milliószorosa a kémiai reakciók során felszabaduló energiának. De mit kell ezen az energia-felszabaduláson érteni? Hogyan jelenik ez meg? A hasadványok és a neutronok mozgási energiájaként. A fűtőanyag kicsiny üzemanyag tablettákban van jelen, melynek részecskéi ütközni fognak a nagy mozgási energiával rendelkező hasadványokkal és neutronokkal. Sok-sok ütközés zajlik le, melynek során sok részecske fog gyorsabban mozogni, tehát növekszik a kapszula hőmérséklete. A felmelegedett üzemanyag kazetta vízzel van körülvéve (primer kör), melynek szintén növekszik a hőmérséklete.

A primer körben a vizet nagyon nagy nyomáson tartják (120-150 bar), emiatt az még a magas üzemi hőmérsékleten (300-330 °C) sem forr fel. (A magas primer köri nyomásról kapta a típus a nevét.) A primer köri víz az úgynevezett gőzfejlesztő kis átmérőjű csöveiben átadja hőjét a szekunder kör vizének, azaz lehűl, majd alacsonyabb hőmérsékleten jut vissza a reaktorba.

A szekunder körben levő víz nyomása sokkal alacsonyabb (40-60 bar), mint a primer körben lévőé, emiatt a gőzfejlesztőben a felmelegedett víz felforr. Innen kerül (cseppleválasztás után) a gőz a nagynyomású, majd a kisnyomású turbinára. A turbinából kilépő gőz a kondenzátorban cseppfolyósodik, ahonnan előmelegítés után újra a gőzfejlesztőbe kerül.

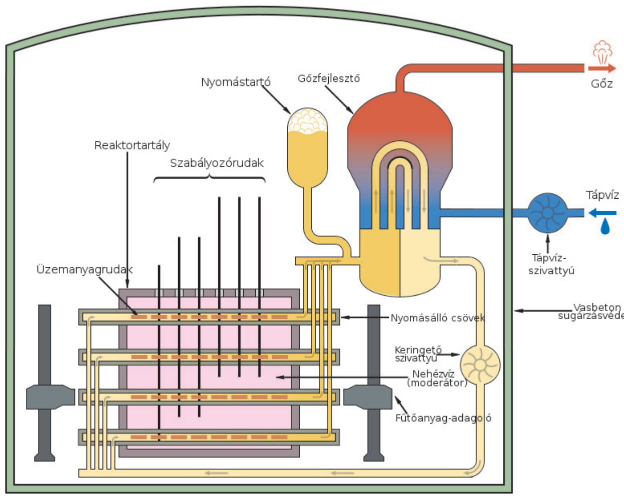


1. Reaktortartály	8. Frissgőz	14. Kondenzátor
2. Fűtőelemek	9. Tápvíz	15. Hűtővíz
3. Szabályozó rudak	10. Nagynyomású turbina	16. Tápvíz szivattyú
4. Szabályozórúd hajtás	11. Kisnyomású turbina	17. Tápvíz előmelegítő
5. Nyomástartó edény	12. Generátor	18. Betonvédelem
6. Gőzfejlesztő	13. Gerjesztőgép	19. Hűtővíz szivattyú
7. Primer köri keringtető szivattyú		

3. ábra. A Paksi Atomerőmű folyamatábrája (forrás: `http://atomeromu.hu`)

A primer és a szekunder kör vize nem keveredik egymással! A gőzfejlesztőben is csöveken keresztül adódik át a primer oldal hője. Így elérhető, hogy a hűtőközegbe került radioaktív anyagok a primer körben maradjanak, és ne kerülhessenek a turbinába és a kondenzátorba (3. ábra).

CANDU típusú reaktorok

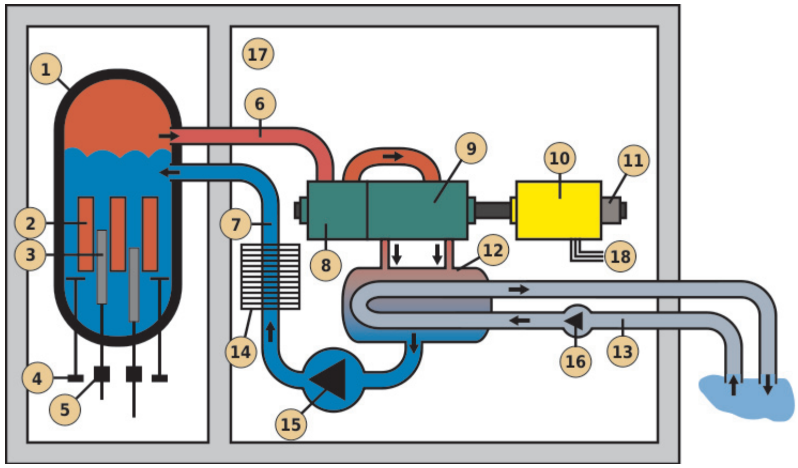


4. ábra. CANDU típusú reaktor

Az elnevezés a következő szavakból alkotott mozaikszó: Canada, Deutérium, Urán. Ebben a típusban nehézvizet alkalmaznak moderátorként. A nehézvízben a hidrogén nehéz izotópja, a deutérium található. Ennek atommagjában a proton mellett még egy neutron is van. Ez jobb moderátor, mint a könnyűvíz, mely ugyan kis mértékben, de elnyel neutronokat. E miatt ebbe a típusba nem kell dúsítani az uránt (4. ábra).
A CANDU típusnak több előnye is van a hagyományos könnyűvíz moderátort használó reaktorokkal szemben:

- a reaktortartály több száz csővel van mintegy keresztüldöfve. Ezekben a csövekben vannak az üzemanyagrudak, amik így külön-külön elérhetők, lehetővé téve az üzem közbeni üzemanyagrúd-cserét,
- az üzemanyagrudakat könnyen át lehet helyezni működés közben – attól függően, hogy mennyi hasadóképes atommag maradt bennük,
- a reaktortartálynak nem kell nyomástűrőnek lennie, mivel a moderátor csak a keresztirányú csövekben van nagy nyomás alatt,
- az alacsony nyomás és hőmérséklet miatt egyszerűbb érzékelőkkel is követni lehet a reaktorban végbemenő folyamatokat,
- természetes, nem dúsított uránnal is működik, viszont a nagy mennyiségű tiszta nehézvíz óriási kezdeti kiadást jelent.

Míg az előző két típus esetében két vízkör van, és a szekunder körben található víz forr fel és kerül a turbinákra, addig ebben az esetben a primerköri víz. Ebből adódóan a szabályzórudak itt lentről felfelé mozognak (5. ábra). Üzemanyaga dúsított urán.



5. ábra. Forralóvizes reaktor

1. Reaktortartály	2. Fűtőelem	3. Szabályzórúd
4. Keringető szivattyú	5. Szabályozórúd hajtás	6. Friss gőz
7. Tápvíz	8. Gőzturbina nagynyomású ház	9. Gőzturbina kisnyomású ház
10. Generátor	11. Gerjesztőgép	12. Kondenzátor
13. Hűtővíz	14. Tápvíz előmelegítő	15. Tápvízszivattyú
16. Hűtővízszivattyú	17. Betonsugárvédelem	

Grafit moderátoros reaktor

A reaktor úgynevezett aktív zónája 25×25 cm-es grafittömbökből áll, melyek között függőlegesen helyezkednek el a nagy nyomás alatt tartott csövek. Ezek magukba foglalják a fűtőelemeket, 190 tonna uránt, és a közöttük áramló hűtőközeget. Az aktív zónából víz-gőz keverék lép ki (tehát a reaktor forralóvizes). Az itt elválasztott gőz kerül a turbinára, majd lecsapatják, és előmelegítés után visszaszivattyúzzák a reaktorba.
Ilyen típusú reaktorok csak a volt Szovjetunió néhány utódállamában működnek. A típusnak műszaki és gazdasági szempontból sok előnye, azonban a biztonság szempontjából jelentős hátrányai vannak.
A reaktor előnyei közé sorolható az elérhető nagy teljesítmény: mivel nincs szükség reaktortartályra, a csatornákból pedig elvileg akármennyit egymás mellé lehet tenni, így a kivehető teljesítménynek elméletileg nincs felső korlátja. (A csernobili reaktorok például 1000 MW elektromos teljesítményűek voltak.) Másik nagy előnye, hogy szemben a könnyűvizes reaktorokkal (hasonlóan a CANDU típushoz) a kiégett üzemanyag átrakása, és cseréje üzem közben is megoldható (6. ábra).

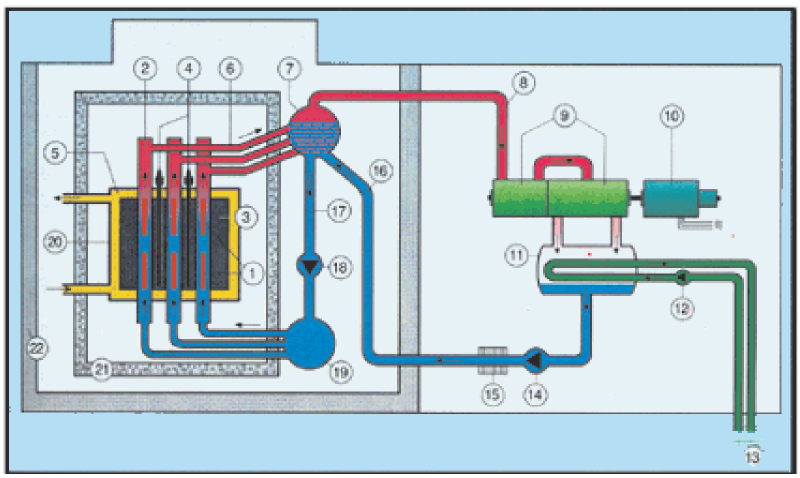
Az atomerőművek generációi

A jelenleg működő és a tervezés alatt álló atomerőműveket elsősorban biztonsági és gazdaságossági szempontok alapján négy úgynevezett generációban szokták sorolni.

1. Az ötvenes és hatvanas években, illetve a hetvenes évek elején üzembe helyezett reaktorokat tekintik első generációs reaktoroknak.
2. A *ma üzemelő erőművek döntő többsége sorolható a második generációsok közé.* Itt már a tervezés során is szigorúbb biztonsági elveket alkalmaztak, például a legtöbbet ellátták olyan

nyomásálló burkolattal (*konténment*tel), vagy egyéb ennek megfelelő védekezési lehetőséggel, amely baleseti helyzetekben megakadályozza a radioaktív anyagok környezetbe jutását.

3. A harmadik generációs reaktorok tökéletesebbek a második generáció erőműveinél, mind gazdaságossági (hatásfok), mind biztonsági (fejlett biztonsági kultúra alapján tervezték) tekintetben, de lényegileg (típusok, üzemanyagciklusuk) nem különböznek azoktól. Zónaolvadás valószínűséges kisebb, mint $\mathbf{10^{-6}}$**/év**
4. A negyedik generációs fejlsztések nagyobb termodinamikai hatásfok elérésére és a *kapcsolt energiatermelésre is alkalmassá teszik a reaktorokat***.** A kapcsolt műveletek alatt általában *hidrogéntermelést, metanol* gyártást értünk, melyekből viszonylag egyszerűen energia szabadítható fel. Ez azért fontos, mivel az egyszer már megtermelt energia, nem tárolható, azonban a *hidrogént* vagy a *metanolt* el tudjuk raktározni, és akkor tudjuk felhasználni, amikor a további energiatermelésre igény van.



1 Urán-üzemanyag	9 Gőzturbina	16 Tápvíz
2 Nyomócső	10 Generátor	17 Víz visszafolyás
3 Grafit moderátor	11 Kondenzátor	18 Keringtető szivattyú
4 Szabályzórúd	12 Hűtővíz szivattyú	19 Vízelosztó tartály
5 Védőgáz	13 Hőelvezetés	20 Acélköpeny
6 Víz/gőz	14 Tápvízszivattyú	21 Betonárnyékolás
7 Cseppleválasztó	15 Előmelegítő	22 Reaktorépület
8 Gőz a turbinához		

6. ábra. Grafit moderátort alkalmazó reaktor

Reaktorméreg

Az olyan atommagokat, melyek elnyelik a neutronokat a reaktorban, ezáltal csökkentve a sokszorozási tényezőt, rontják a láncreakciót, nevezzük reaktormérgeknek. A legfontosabb ezek közül a hasadási folyamatban folyamatosan keletkező Xe-135-ös tömegszámú izotóp.
A neutronelnyelés oka: a Xe-135-ös tömegszámú atommagban a neutronok száma 81, ami majdnem mágikus (82).
Az elektronszerkezet leírásakor megismert módon kvantumszámokkal lehet jellemezni az atommagban lévő nukleonokat, protonokat és neutronokat: A Pauli-elv felhasználásával a nukleonokat el lehet

helyezni a különböző energiaszintekre. Ez az atommag **héjmodellje**, mert ez a modell határozott indoklást ad arra, hogy az atommagban meghatározott energiával jellemezhető energiaszintek vannak, és utal a lezárt és így különösen stabil magot képező izotópok létére. Az ezekhez tartozó nukleonszámokat **mágikus számok**nak is szokás nevezni, amelyek az alábbiak: 2, 8, 20, 50, 82, 126.

A neutronelnyelés során keletkező Xe-136 izotóp atommag gyakorlatilag stabil (a természetes előfordulás 8,9%-a). A Xe-135 más módon is eltűnik a rendszerből, $T = 9{,}1$ óra felezési idővel Cs-135-re bomlik.

Az üzemeltetés során szokás alkalmazni úgynevezett kiégőmérget, melyre a friss üzemanyag behelyezésekor a túl nagy reaktivitás lekötése miatt van szükség. A neutronbefogás után olyan izotóppá alakul, mely már nem fog be neutront. Így eltűnik a rendszerből. Például ilyen a gadolínium. Így hosszabb lehet a kampányidőszak.

Néhány adat a tervezés alatt lévő Paks2 blokkokról

Elsőként a biztonsági meggondolásokat emeljük ki. Az új blokkoknak rendelkezniük kell azokkal az úgynevezett harmadik generációs erőművekre jellemző biztonsági rendszerekkel, műszaki megoldásokkal, amelyekkel a súlyos baleseti események következményei is csak az erőművön belül jelentkeznek.

A jelenleg Pakson működő 500 MW teljesítmény helyett a tervezett két új blokk 1200 MW villamos teljesítményű lesz. Típusjelzése AES-2006, ahol a 2006-os szám arra az évre utal, amikor az első blokk tervei elkészültek.

A reaktortartály belső átmérője $4{,}25$ m lesz. Az aktív zónában 163 kazetta található, egy kazetta 533 kg UO_2 üzemanyagot fog tartalmazni, mely mindösszesen majdnem 87 tonna uránoxid töltetet jelent, a jelenlegi 42 tonna helyett. A kazetták hatszög keresztmetszetűek, hasonlóan a mostanihoz, de egy kazettában 123 helyett 312 fűtőelemrúd lesz. A rudak aktív hossza jelenlegi 2,5 m helyett 3,7 m hosszúságú lesz. A kazettát a jelenlegitől eltérően nem veszi körül zárt kazettafal. Néhány külső merevítő elem gondoskodik arról, hogy a kazetta alakja üzemelés közben ne tudjon megváltozni. A szabályozó rudak a kazetták belsejében helyezkednek el. A 18 darab szabályozó rúd egy közös meghajtóval irányított klaszterban mozog a kazettán belüli megvezető csövekben. A kazetták üzemanyag része az üzemelés során végig a zónában van. (A jelenleg üzemelő VVER-440 reaktorok ettől eltérő megoldással működnek: a szabályozó és biztonságvédelmi kazetták felső részét bóracél elnyelő alkotja, alsó részében pedig a munkakazettákhoz hasonló elrendezésben, UO_2 üzemanyagot tartalmazó rudak vannak. Amikor a bóracél szakaszt betolják a zónába, akkor az alatta található, uránt tartalmazó rudak a zóna alá kerülnek.) A fűtőelemek burkolata cirkónium ötvözetből készül. 60 éves üzemidővel számolnak.

Az új blokkokban a reaktor és a primerkör a védőépületen (konténmenten) belül fog elhelyezkedni. Itt találhatóak a vészhűtő rendszerek is. A kettős falú, 50 méter átmérőjű épület megakadályozza radioaktív anyagok kikerülését a környezetbe és védi a berendezéseket a külső veszélyekkel szemben.

A harmadik generációs reaktorokat úgy tervezik, hogy azokban megfelelő eszközök álljanak rendelkezésre a súlyos balesetek kezelésére. Az AES-2006 tervezői olyan megoldásokat alkalmaznak, hogy egy súlyos reaktorbalesetnek az erőművön kívül ne legyen hatása a környezetre. A zónaolvadással járó súlyos balesetek kezelésére több megoldást is kínálnak.

A zóna sérülését követően, a cirkónium-vízgőz reakció következtében keletkező hidrogén veszélyeztetheti a védőépület épségét, ahogy azt a fukusimai baleset is mutatta. Az AES-2006 erőműben a védőépület felső részében elhelyezett passzív autokalitikus rekombinátorok akadályozzák meg a robbanásveszélyes állapotok kialakulását.

A zónaolvadás továbbfejlődésének megakadályozására a reaktortartály alatt úgynevezett olvadékcsapdát alakítottak ki.

	VVER-440	**AES 2006**
Kazetta hossza	2600 mm	4033 mm
Aktív hossz	2480 mm	3730 mm
Forma	hatszöges	hatszöges
Rudak száma	126	312
Tabletta	7 mm átmérő, 10 mm magas	7 mm átmérő, 10 mm magas
Kazettafal	van	nincs
Kulcsméret	145 mm	235 mm
He nyomás	6 bar	20 bar
Kazetták száma	349 = 312+37 (szabályzó)	163
Dúsítás (235 izotópban)	4,2 %	4,2 %
Kazetta tömege (UO_2)	121 kg	533 kg
Töltet tömege	42 tonna	87 tonna
Kiégőméreg	gadolínium	gadolínium

1. táblázat

A kettősfalú konténmentet úgy tervezték, hogy el tudja viselni egy nagyméretű utasszállító repülőgép rázuhanását is.
További információként egy összehasonlító táblázatot közlünk a jelenleg Pakson működő VVER-440-esben és a tervezett AES 2006-os reaktorokban használatos üzemanyag-kazetták jellemzőiről (1. táblázat).

Felhasznált irodalom

Hózer Zoltán, Pázmándi Tamás (2014): Új blokkok a paksi atomerőműben. *Nukleon*. VII. évfolyam 1. szám 152-es cikk
`http://nuklearis.hu/sites/default/files/nukleon/Nukleon_7_1_152_Hozer.pdf` utolsó látogatás 2014. május 2.
Keresztúri András és mtrsai (2014): Negyedik generációs reaktorok. Fizikai Szemle. LXIV. Évfolyam 4. szám
`http://wwwold.kfki.hu/fszemle/archivum/fsz1404/Kereszturi_A_PatakiI_TotaA.pdf`
Király Márton (2012): Egy részben elfelejtett technológia nyomában. *Nukleon*. V. évfolyam 3. szám 114-es cikk
`http://nuklearis.hu/sites/default/files/nukleon/Nukleon_5_3_114_Kiraly.pdf`
`http://hu.wikipedia.org/wiki/CANDU` utolsó letöltés 2014. június 1.
`http://www.reak.bme.hu/csernobil/index.htm?rbmk` utolsó letöltés 2014. június 1.

Munkácsy Katalin

Szabadtéri matematika

Az elmúlt években tapasztalataim és a módszertani irodalom eredményei alapján új típusú feladatokat konstruáltam általános- és középiskolai tanulók számára. a szabad levegőn, a terep adottságait kihasználó problémamegoldás több szempontból is a korábbiaktól eltérő élményeket nyújt a tanulóknak. Az asztalok melletti ülés helyett többé-kevéssé szabadon mozoghatnak, ennek pihentető hatása van. A megszokottól eltérő méretek új felismerésekhez vezethetik el a tanulókat, pl. ha 2 ad n lépést kell lépniük, ez nagyon egyszerűnek tűnik, de már az $n = 10$-re is nehezen megoldható a feladat. A meglévő ismeretek alkalmazása terepi körülmények között szintén új kihívásokat jelent. Ilyen feladat volt korábban, amikor az egyetem körüli látványt, egy választott nézőpontból, kellett nagyon leegyszerűsítve felvázolni, majd függvények segítségével „lekottázni” a látványt.
A 2014-es feladatok alkalmazkodtak a közelben lévő Infopark lehetőségeihez.

1. feladat. A csapatoknak egy medence vízmélységét kellett megállapítani, úgy, hogy a vízhez semmilyen módon nem érhettek hozzá. A méréshez egy ókori görög módszert alkalmazhattak, ami egy római fölmérő feljegyzéseiben maradt meg. A tanulók megismerkedtek a módszerrel: egy hajó parttól mért távolságát megállapíthatjuk, ha vízen képzeletben és a parton valóságban kijelölünk két, közös csúcspontú, egybevágó derékszögű háromszöget. A keresett távolságot a szárazföldön mérhetjük meg. A diákoknak ezt az eljárást függőleges síkban kellet megismételniük. A íz fénytöréséből származó torzító hatástól eltekintettünk.

2. feladat. A csapatoknak egy személyautó térfogatára kellett kétféle eljárással becslést adniuk. Az egyikben az autó jellegzetes adatait kellett megmérniük, az alakját megközelítően követve. A másik módszer szerint egy általuk készített gyurmamodell vízkiszorítását mérték. Megállapították a méretarányt, és ezekből az adatokból számítottak térfogatot.

A kísérő pedagógusok nagyszerű munkát végeztek. Segítették a feladatok megoldását, ugyanakkor minden egyes tanuló számára lehetővé tették, hogy aktívan részt vegyenek a problémamegoldásban.

Róka András

Egymásra épülés

„Ha sok cseresznyepaprikát madzagra fűzünk,
abból lesz a paprikakoszorú.
Ha viszont nem fűzzük fel őket, nem lesz belőlük koszorú.
Pedig a paprika ugyanannyi, éppoly piros, éppoly erős.
De mégse koszorú.
Csak a madzag tenné?”

Örkény István

A XX. század tudományos felfedezési alapján ma már közismert, hogy anyagi világunk hierarchikus felépítésű. A Matrjoska-babához hasonlóan minden „doboz” kinyitásakor újabb szerveződési szinthez jutunk (kristályok – molekulák – atomok – elemi részek). A különböző részecskék szerveződése, sőt önszerveződése azonban bármilyen szép struktúrák kialakulásához vezet, folyamatok híján azok csak statikus szerkezetek. (A legjobb formatervezésű autó is csak akkor ér valamit, ha működik.) Hiába készítünk elektronmikroszkópos felvételt az egysejtűekről, az élet lényege – a sejt szintű folyamatok sokasága – a szemnek láthatatlan.

A természeti jelenségekben, a működő technikai eszközökben vagy az élő szervezetekben a folyamatok is egymásra épülnek, amit a gyertya égésének elemzése alkalmából találóan Faraday fogalmaz meg:

„Alig tudom az alkalmazkodás szebb példáját elképzelni:
a legjobb eredmény kedvéért a gyertya minden egyes része
szolgálatra kész társa a másiknak.”

A „működés” során párhuzamosan (egyidejűleg) vagy egymást követően (sorozatosan) egyszerre több folyamat játszódik le. A folyamatok sokaságát nem tudjuk egyszerre átlátni. Ezért a színre lépő kölcsönhatásokat egyenként kell számba venni („analízis”), hogy utána az elemi folyamatokat összerakva a részekből egészet alkothassunk („szintézis”).

A folyamatok láncában a kölcsönhatásokra jellemző energiafajták egymásba történő átalakulása játszódik le, miközben anyagáramlások, illetve részeke áramok indulnak.

A jelenségek, tágabb értelemben a természet logikája alapjaiban Newton törvényeire vezethetők vissza: Egy (termodinamikai) rendszer éppolyan „tehetetlen”, mint a testek. Állapota (nyomása, hőmérséklete, koncentrációja stb.) külső hatás hiányában éppúgy nem változik meg, mint a testek mozgásállapota. A második törvény által matematikai formulában is kifejezett logikai kapcsolat ($\mathbf{F} = \Delta\mathbf{I} \div \Delta\mathbf{t}$) Onsager nyomán általánosítható: Amíg a külső erő (ok) a testek esetében mozgásállapot-változást idéz elő (okozat), a termodinamikai rendszerekben a hajtóerő (ok) kelt transzport folyamatot (okozat).

A nyomás-, a hőmérséklet-, az elektromos potenciál- vagy a koncentráció különbsége (általánosan a kiegyenlítődésre törekvő mennyiség térbeni gradiense) anyag-, energia-, töltés- vagy részecskeáramlást hoz létre, vagy tart fenn.

Egy-egy jelenségben azonban általában egyszerre több kölcsönhatás lép színre, legfeljebb az egyszerűsítés kedvéért a számunkra éppen fontosat emeljük ki (modellezés).

A kölcsönhatások sorba állásának törvénye legegyszerűbben a Faraday által felfedezett elektromágneses indukcióval szemléltethető, amikor a változó mágneses tér töltésáramot indukálva elektromos teret hoz létre. Vagyis amikor kölcsönhatás kölcsönhatást kelt, az egyik kölcsönhatáshoz tartozó hajtóerő az általa indított folyamattal a másik kölcsönhatáshoz tartozó hajtóerőt ébreszt. (Miért repül a felfújt léggömb az elengedés után? A rugalmas felület összehúzódása nyomáskülönbséget tart fenn, aminek következtében folyamatosan áramlik ki a levegő).

Az egymásra épülésnyomon követése különösen fontos a kémiai folyamatok (mint például az égés) mechanizmusának feltárásában. A kémiai reakciók esetében a lényeg az elektronok átrendeződése, ami a vegyülés szigorú törvényei szerint játszódik le (egyenértékű elektroncsere a párhuzamosan lejátszódótöltéskiegyenlítődéssel). A reakció azonban összetettebb ennél, mert társulnak az elektron átrendeződést megelőző és követő lépések (a reakciópartnerek közeledése, kölcsönhatása, az aktiválás, illetve az exoterm reakciók esetében az energia felszabadulása és eloszlása). Az elemi lépések Faraday-elvű *„szolgálatra készsége”* (egymásra épülő egymásra utaltsága) abban nyilvánul meg, hogy az energiát termelő lépés fedezi az energia igényes folyamatok energia igényét. Ezért az exoterm reakciók esetében az energiának csak az a része távozik el és oszlik el a környezetben, ami nem fordítódik a reakció önfenntartására.

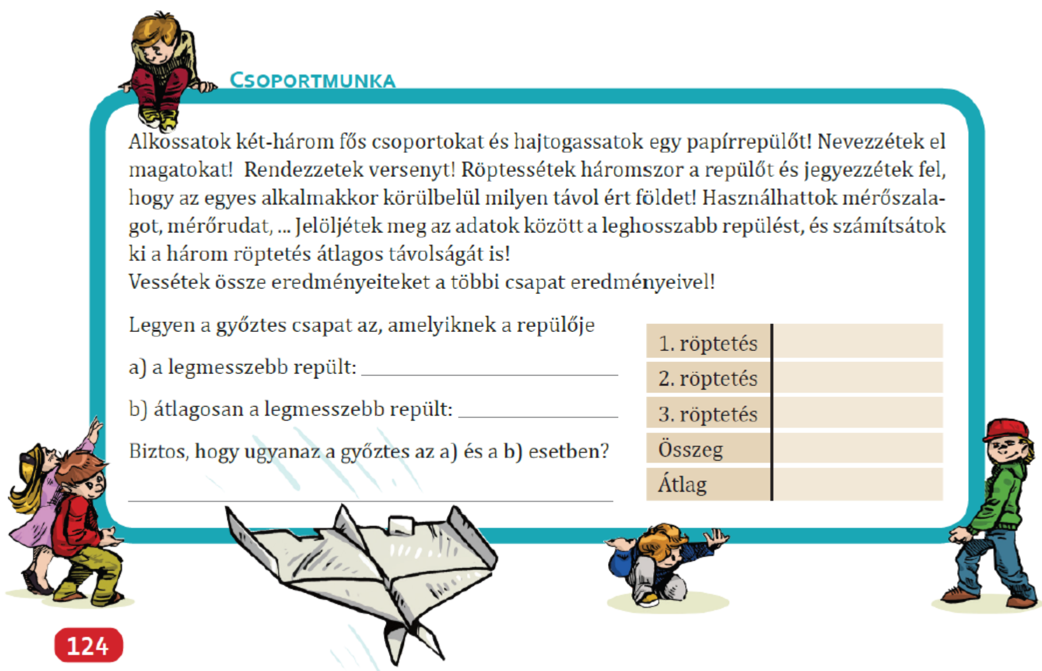
A kémcsőbe helyezett gyufaszálak az erélyes hevítés hatására sem égnek el, csak elszenesednek. A képződő gázok-gőzök ugyanis kiszorítják a levegőt, és oxigén hiányában nem léphet színre az energiát termelő oxidáció. Ezért annak ellenére, hogy a távozó gázok a hevítés helyétől távol, a kémcső szájánál meggyújthatók és elégve hőt termelnek, a kémcső aljában csak az energiát igénylő lépések játszódhatnak le (termikus bomlás). Amikor a gyufaszál a levegőn ég, ugyanazok a folyamatok játszódnak le, mint a lepárlás során, csak térben egy helyen. Vagyis nem külső energiaforrás, hanem az oxidáció maga fedezi a termikus bomlás energia szükségletét, és a képződő gázhalmazállapotú bomlástermékek a levegővel keveredve alkotják a lángot, a homogén gázfázisú reakció látványát. Az exoterm folyamatok tehát azért önfenntartóak, mert az eloszló energia visszacsatolásán keresztül az elemi lépések önszerveződően körfolyamattá zárulnak,

A folyamatok egymásra épülésének legszebb és legfontosabb példája a bioszféra anyag- és energiatranszportja. Az energiaigényes folyamat (a fotoszintézis) egyszerre hozza létre az energiaforrást és az azzal történő energiatermelés oxigénszükségletét. A fotoszintézis és a termékeire épülő biológiai energiatermelés térben és időben azért válhatott ennyire függetlenné egymástól (növények – állatok), mert a napenergia az energiahordozó vegyületekformájában a tápláléklráncon keresztül megmaradó módon vándorol, illetve raktározódik mindaddig, amíg nem hasznosul.

Wintsche Gergely

Egy kísérlet nem kísérlet

Nagy örömmel készültem Pálfalvi Józsefné felkérése alapján néhány érdekes és izgalmas feladattal a szombat délutáni foglalkozásra. A tervem az volt, hogy elméleti összefoglaló helyett az aktív tanulást részesítsem előnyben. A foglalkozás címe is ehhez igazodott, „Egy kísérlet nem kísérlet”. Az aktív foglalkozások megkérdőjelezhetetlen előnye, hogy a gyerekek magukénak érzik a feladatot, sokkal szívesebben fordulnak a megoldás felé, ha megerősítjük az intrinsic (belső) motivációjukat, mintha külső kényszer – a tanár parancsszava – alapján hajtanak végre feladatokat. Ez tovább erősíthető, ha manuális feladatokkal, tevékenykedtetéssel kötjük össze a matematika tanulását. A gyerekek életkorának vegyes összetételét is figyelembe véve az általam kiválasztott első feladat a most megjelenés alatt álló 5. osztályos kísérleti matematika munkafüzet egyik példája volt:



CSOPORTMUNKA

Alkossatok két-három fős csoportokat és hajtogassatok egy papírrepülőt! Nevezzétek el magatokat! Rendezzetek versenyt! Röptessétek háromszor a repülőt és jegyezzétek fel, hogy az egyes alkalmakkor körülbelül milyen távol ért földet! Használhattok mérőszalagot, mérőrudat, ... Jelöljétek meg az adatok között a leghosszabb repülést, és számítsátok ki a három röptetés átlagos távolságát is!
Vessétek össze eredményeiteket a többi csapat eredményeivel!

Legyen a győztes csapat az, amelyiknek a repülője

a) a legmesszebb repült: ____________________

b) átlagosan a legmesszebb repült: ____________________

Biztos, hogy ugyanaz a győztes az a) és a b) esetben?

____

1. röptetés	
2. röptetés	
3. röptetés	
Összeg	
Átlag	

124

A feladat megoldásának szervezése:
A tevékenység ismertetése után az első nehézséget az okozta, hogy kiderült, a hatodik-hetedik osztályos gyerekek egy része nem tud papírrepülőt hajtogatni. Főleg a lányok voltak azok, akik kivonták magukat a hajtogatás alól. Számomra ez meglepő volt, azt hittem, hogy ez mindenkinek alapkészsége. A problémát a csoportok apró átszervezésével hidaltuk át, így minden csoportba került legalább egy olyan ember, aki vállalta a hajtogatást. A röptetéshez kimentünk a folyosóra. Kiosztottam a mérőszalagokat, de végül csak egyet használtunk. Minden csapat igyekezett, hogy az ő általuk tervezett gép szálljon a legmesszebbre, és jó hangulatban vettük fel az adatokat.
Közben a következő kérdéseket tettem fel:
1. Milyen technikát alkalmaznak a röptetéshez?
2. Milyen pontossággal érdemes mérni?
3. Milyen mértékegységet használjunk?

4. Honnan kezdjünk mérni?
A vicces beszólások mellett természetesen minden kérdésre jól átgondolt válaszokat is kaptam, úgyhogy 10 cm pontossággal és méterben vettük fel az adatokat. A kísérletek eredménye minden várakozásomat felülmúlta.

	I. csapat	II. csapat	III. csapat	IV. csapat
1. röptetés	6,4	5,2	11,0	3,2
2. röptetés	6,0	6,2	6,4	6,4
3. röptetés	5,8	4,4	2,2	2,4
átlag	6,07	5,27	6,53	4,0

Megbeszéltük, hogy ki nyer, ha az átlagosan legjobb csapat nyer, ki nyer, ha a legnagyobbat dobó nyer.
Elemeztük az átlag változását, azaz feltettem a kérdést:
Mi lenne, ha a III. csapat 2. dobása 1 méterrel kisebb lett volna? Hogyan változna az átlaguk?
Mi lenne, ha a III. csapat 2. dobása 2 méterrel kisebb lett volna? Hogyan változna az átlaguk?
Mi lenne, ha a III. csapat 2. dobása 3 méterrel kisebb lett volna? Hogyan változna az átlaguk?
Mennyivel kellene csökkennie a dobásaiknak, ha az átlagukat legalább 46 centivel akarjuk csökkenteni?
Várhatóan mi történne több kísérlet esetén? Módosulnának az eredmények?
A feladattal végig sikerült fenntartani a gyerekek és a tanárok érdeklődését. Szemmel láthatóan és füllel hallhatóan élvezték a munkát. A feladat végrehajtásakor a tanárnak célszerű vezetni a kísérlet lebonyolítását, nem megengedhető, hogy az óra ritmusa szétcsússzon, állandóan foglalkoztatni kell a gyerekeket.
Második feladatom sokkal összetettebb volt.
Ehhez felhasználtam az Újzélandi kormány által is támogatott „Census at school” program néhány régebbi elemét. (http://new.censusatschool.org.nz)
A gyerekeknek (és a tanároknak) először négy görbét kellett lerajzolniuk.

- Az iskolában lévő összes ember kora.
- Ennyi idő alatt érnek be a suliba.
- Használtautó árak.
- Autók kora.

Az első nehézséget rögtön ez okozta. Hogyan rajzoljunk le valamit, ha nem ismerem az adatokat? Sok gyerek nekiállt adatsort felállítani, hogy majd az alapján rajzolnak oszlopdiagramokat. Legalább 3 perc kellett ahhoz, hogy meggyőzzem őket, nem ez a feladat. Megbeszéltük, hogy a grafikonoknak lehetnek sajátosságaik.

- Hogy írjuk le?
- Hogy tudnánk jellemezni, ha nem látunk ilyeneket?
- Miként adjuk meg ezeket?

Ezután már mindenki rajzolt valamilyen ábrát, és amikor összevetettük őket, kiderült, hogy nagyon hasonlókat rajzoltak. Azaz csak arra volt szükség, hogy a merev matematika világából átevezzünk a rajzóra keretébe.
A következő feladatnak is hitetlenül álltak neki, de nagyon jól teljesítették azt. Kilenc grafikont villantottam fel 1-3 másodpercre, és azt kértem rajzolják le azokat, majd hasonlítsák össze a rajzaikat a szomszédok rajzaival.
Kiosztottam a kivetített grtafikonokat, és párosítani próbáltuk a rajzokat megadott forrásadatokkal.

Iskolában töltött félnapok száma

Jobb láb hossza (cm)

Háztartások adóssága

A nagy pöttyös kiwi tömege (kg)

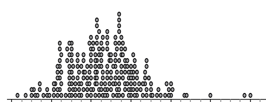
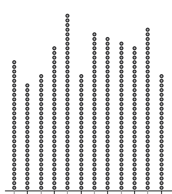
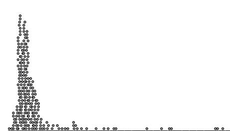
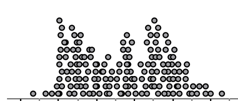
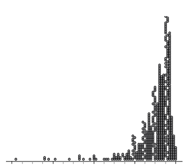
Születési hónap

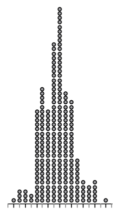
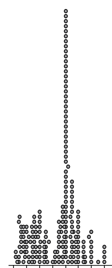
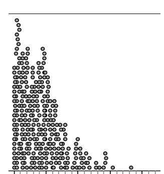
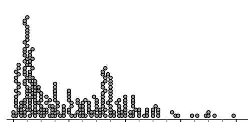
Heti munkaórák száma

Ugrások 30 sec alatt (5-8 évesek)

Reakcióidő

Hajhossz

Ábra	A rajzolt görbe jellemző	Mi lehetett a forrás?
1. 		
2. 		
3. 		
4. 		
5. 		

Ábra	A rajzolt görbe jellemző	Mi lehetett a forrás?
6. 		
7. 		
8. 		
9. 		

Nagyon jól lehetett követni, hogy a 2. grafikont egy ember kivételével mindenki azonnal párosította, a többi pár meghatározása közben pedig tág terünk nyílt a matematikát összekapcsolni valós adatokkal és valós társadalmi, szociológiai jelenségekkel.

Például: Miért van egy nagyon kiugró adat a 7. grafikonon és melyik lehetett az adat forrása? Mi ennek az oka?

Megoldás: A heti munkaórák száma, mert csakúgy, mint Magyarországon, másutt is törvény szabályozza ennek mennyiségét.

A gyerekek és a tanárok határozottan fejlődtek, legnagyobb eredménynek azt tartom, hogy a „Hogyan kell megoldani egy ilyen matekpéldát.” kérdés helyett eljutottunk a „Hogyan érdemes foglalkozni hasonló kérdésekkel?” probléma felvetéséig. Kicsit szélesebbre tártuk a kaput a gyerekek és a tanárok előtt.

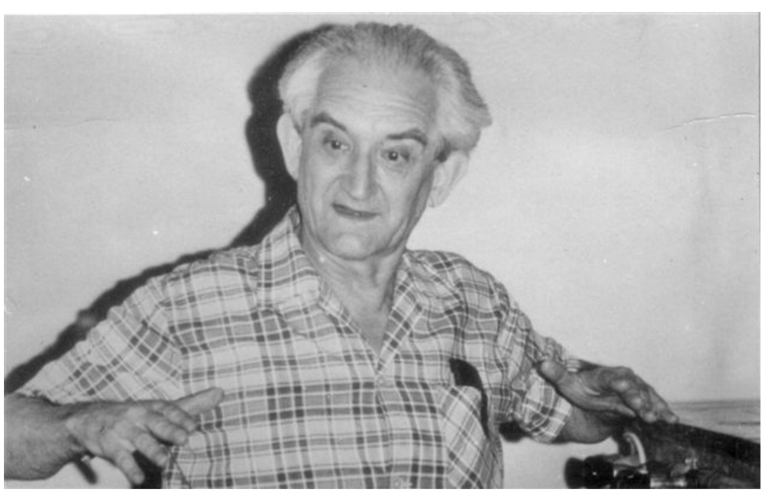
Függelék

Alapítványunk névadója: Varga Tamás

Varga Tamás (1919–1987), a magyar matematikatanítás kiemelkedő alakja hazai és nemzetközi elismerést szerzett az u.n. komplex matematikatanítási módszer kidolgozásával az 1960-70-es években. Az általa vezetett komplex matematikatanítási kísérlet tapasztalatai, alapelvei alkalmazásával jött létre 1978-ban az új egységes általános iskolai matematika tanterv. 1971-ben jelent meg Varga Tamás „A kivételesek vannak többen” című cikke, mely szerint a gyerekek értelmi-, szellemi-, lelki-, azaz mentális kora egy adott évfolyamon igen nagy szórást mutat. Ezért nem szabad minden gyerekkel ugyanúgy foglalkozni és ugyanazt számon kérni. Mind a lemaradók, mind a tehetségesek más-más módszereket igényelnek. A korábban szinte egyedüli frontális osztálymunkával szemben hirdette a munkaformák változatosságát, a csoportos tevékenység, a játék hatékony alkalmazási lehetőségeit és mindehhez gazdag anyaggal járult hozzá könyveivel, előadásaival, kisebb írásaival. Koncepcióját a világ sok országában megismerték, alapelveit elfogadták és alkalmazták. Az 1980-as években az elsők között ismerte fel a számítástechnika alkalmazásában rejlő lehetőségeket a matematikatanítás módszereinek megújításában.

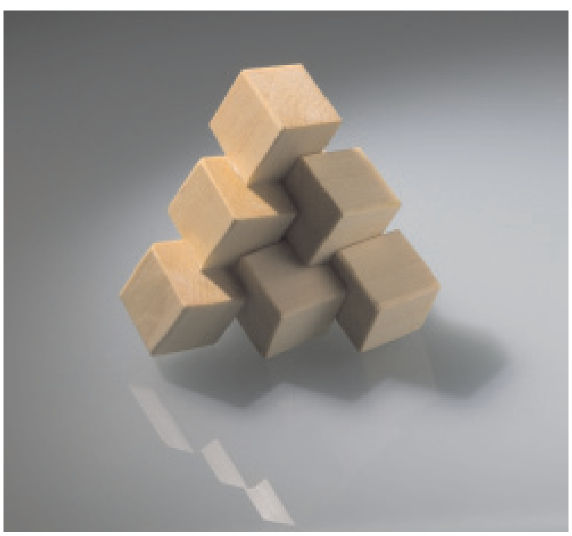
A magyar matematikatanítás valamennyi szintjén – az óvodától az egyetemig – ma is kimutathatók Varga Tamás munkásságának eredményei. A NAT tartalmában, szellemiségében könnyen felismerhető a Komplex matematika tanterv és az erre épülő 1978-as tanterv hosszú távon is maradandó hatása.

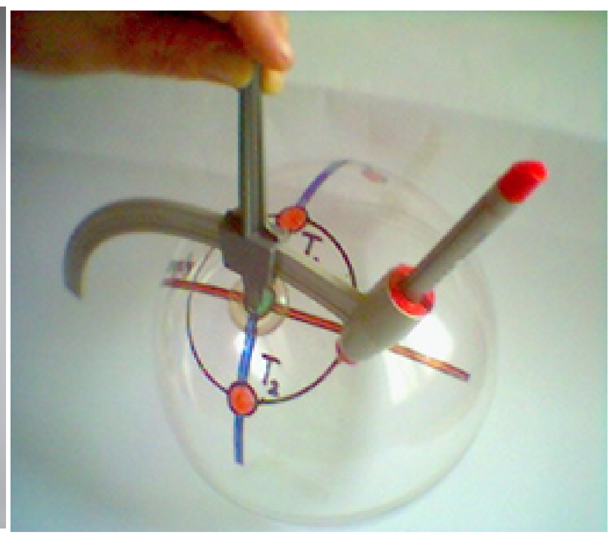
Korunk matematikatanítása előtt újabb kihívások állnak: a nemzetközi kutatások és mérések, a kompetencia alapú képzés, a hatékonyan alkalmazható tudásszerzés, az esélyegyenlőség, a tehetségfejlesztés módszertani problémáinak megoldásához Varga Tamás munkásságára támaszkodva módszereinek, elgondolásainak továbbfejlesztésével léphetünk előre. A matematika tanításában elengedhetetlen, hogy az absztrakt fogalmakat, ismereteket a gyerekek tapasztalataira, felfedezéseire építve fejlesszük, a kialakításukra hosszú érlelési időt biztosítva. Szükséges, hogy ez a fejlesztési folyamat a gyerekek különböző képességeinek, előismereteinek figyelembevételével differenciáltan történjen. Fontos, hogy olyan, közös tevékenységekre, játékokra épülő, kreatív feladatokat adjunk az órákon, amelyek felkeltik a gyerekek érdeklődését, megmutatják a matematika alkalmazhatóságát és szépségét.

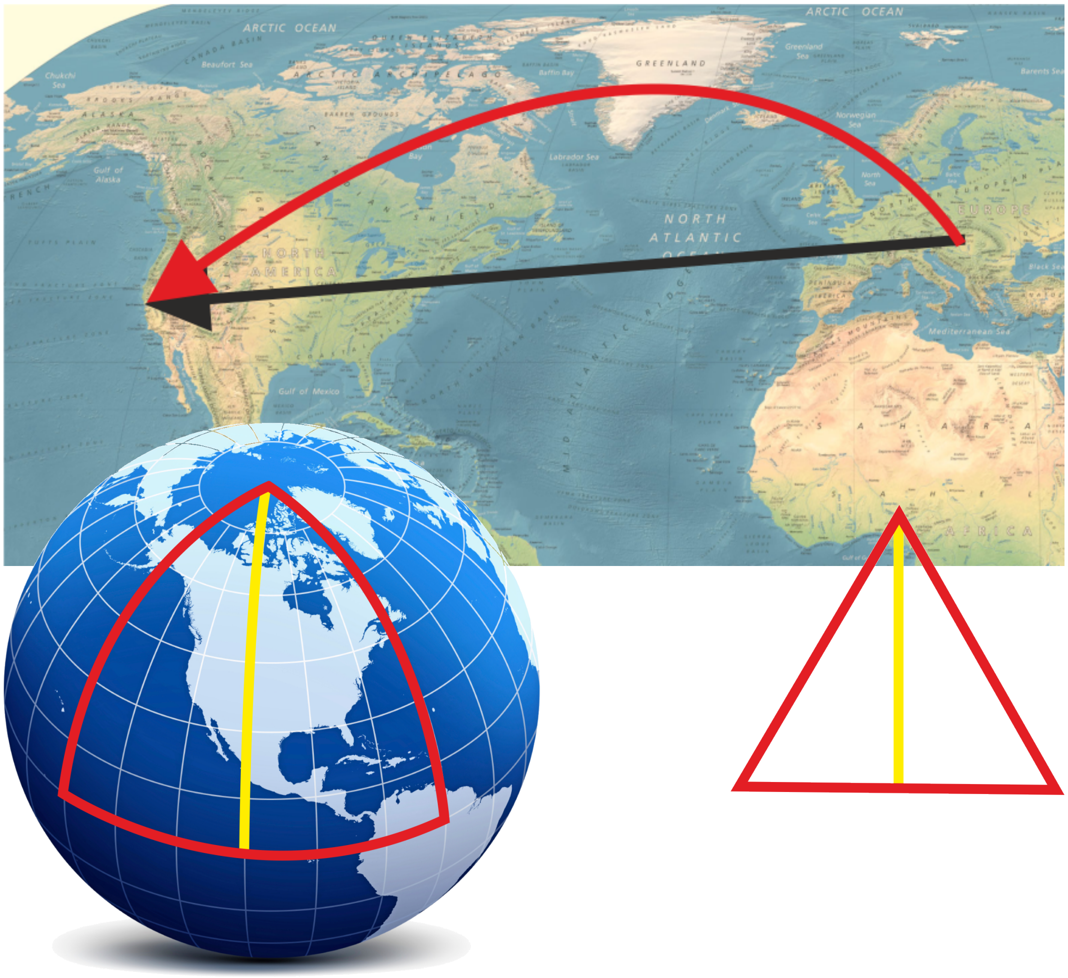


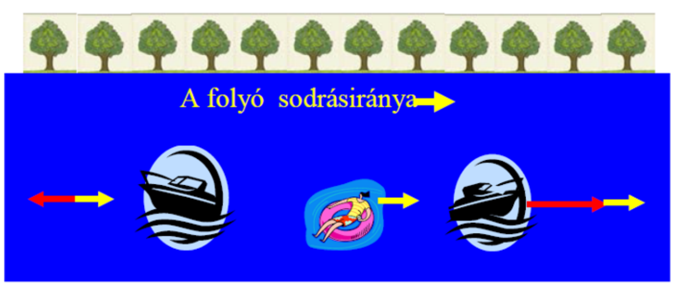
http://hu.wikipedia.org/wiki/Varga_Tamás_(tanár)


„...KI ELŐBB, KI KÉSŐBB, KI-KI A MAGA SZINTJÉN, KI-KI A MAGA TEMPÓJÁBAN, KI-KI A MAGA MÓDJÁN."
Szendrei Julianna
1948 – 2013
A matematikatanítás megújításának, jobbításának egyik élharcosa volt. Sokoldalú tudását hazai és külföldi fórumokon – kötetekben, előadásokon, társulatok munkájának sokszor vezető részt-vevőjeként – kamatoztatta. A tanítóképzésben vállalt szemléletformálása az általános pedagógiai kultúrát tette szebbé, gazdagabbá.
Hitt mindabban, amiért matematikát tanítani érdemes: az emelt fejű, egyenrangú társnak nevelt diákban, a szabadság, a tisztesség és a jóindulat erejében, a tudományok és művészetek egységében.






ARCTIC OCEAN
GREENLAND
NORTH ATLANTIC


A folyó sodrásiránya


a fák mozgásiránya
Ez egy tó, a fák mozognak balra!!